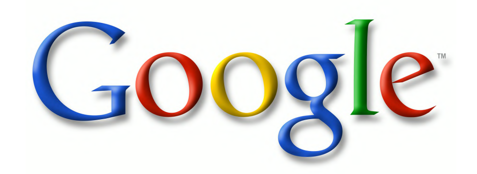
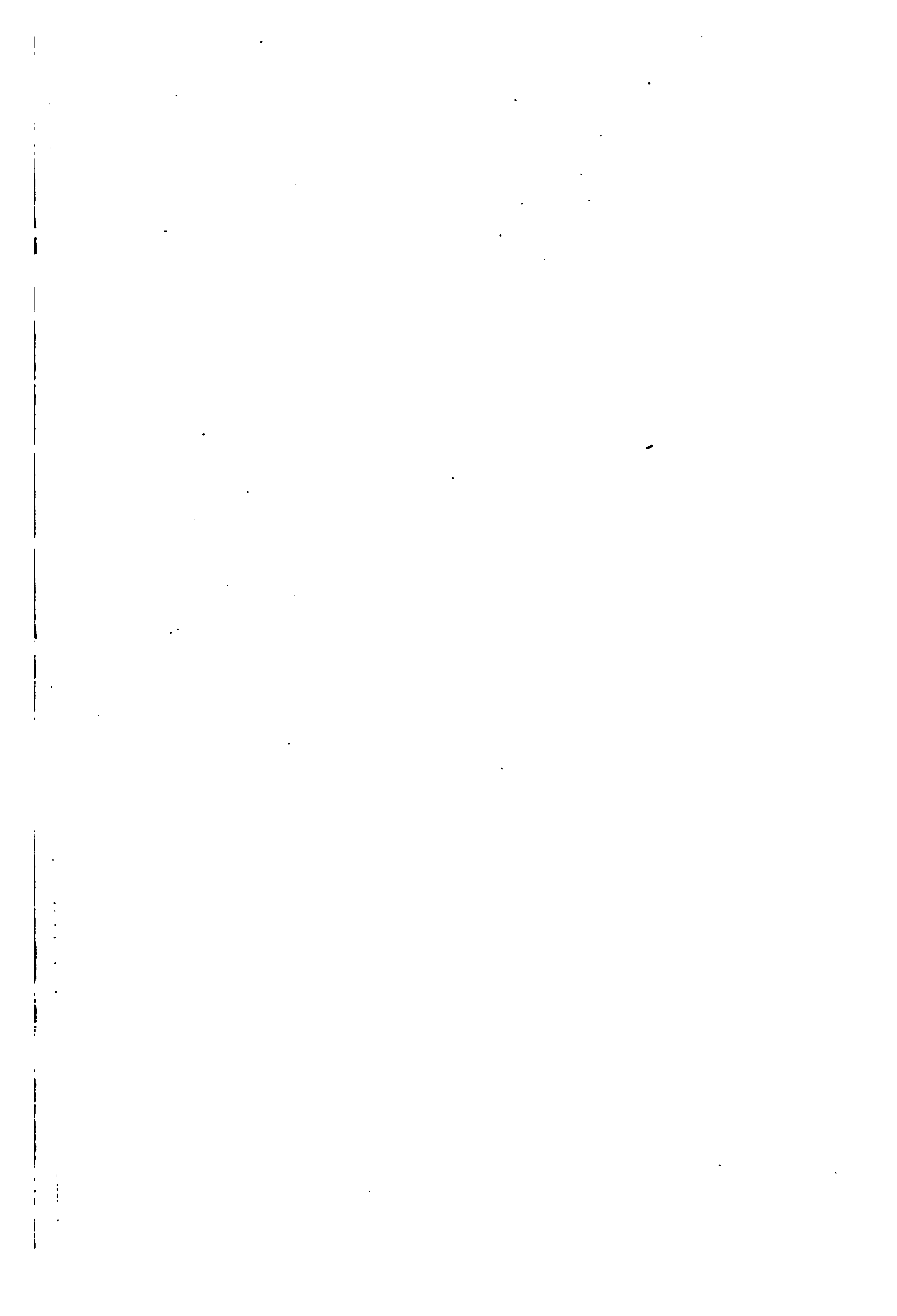




THEORIE

DER

DOPPELTPERIODISCHEN FUNCTIONEN

EINER

VERÄNDERLICHEN GRÖSSE.

VON

Dr. MARTIN KRAUSE,

PROFESSOR AN DER KÖNIGL. SÄCHS. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU DRESDEN.

ERSTER BAND.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1895.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN DRESDEN.

Vorwort.

Das folgende Lehrbuch ist einerseits aus den Vorlesungen entstanden, welche der Verfasser an verschiedenen Hochschulen, vor Allem der Rostocker und der hiesigen über die doppeltperiodischen Functionen gehalten hat, andererseits aus den Arbeiten, die von seinen Schülern und ihm über den genannten Gegenstand in verschiedenen Zeitschriften veröffentlicht worden sind. Ursprünglich war es die Absicht, lediglich eine Theorie der Functionen zweiter und dritter Art zu geben, die in deutschen Lehrbüchern überhaupt noch nicht ausführlich behandelt worden sind — bei dem engen Zusammenhang aber, in welchem diese Functionen zu den gewöhnlichen doppeltperiodischen Functionen stehen, zeigte es sich als nöthig, auch letztere in den Kreis der Betrachtungen zu ziehen. Unter solchen Umständen entschloss ich mich, die Theorie der gesammten doppeltperiodischen Functionen in einheitlicher Weise zu entwickeln. Immerhin ist die ursprüngliche Absicht bei der Auswahl des behandelten Stoffes nicht ohne Einfluss gewesen — es ist von manchen Untersuchungen abgesehen worden, die mit dem ursprünglichen Zwecke nur in losem Zusammenhang stehen. Es bezieht sich das vor Allem auf die Transformationstheorie. Es ist als eine Hauptaufgabe des Werkes zu bezeichnen, diese Theorie auf anderer Grundlage, als es bisher in den Lehrbüchern geschehen ist, anzubahnen. Unter solchen Umständen ist davon abgesehen, auf die algebraischen und functionentheoretischen hierauf bezüglichen Untersuchungen tiefer einzugehen. Es konnte das um so mehr geschehen, als hierüber zwei ausgezeichnete Werke, die Werke von Weber und von Klein, vorliegen.

Eine klare Einsicht in das vom Verfasser Erstrebte dürfte erst nach dem Erscheinen des zweiten Bandes zu gewinnen sein. Derselbe soll die Anfänge der Transformationstheorie auf neuer Grundlage, die

Entwickelung der Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen und endlich die mannigfaltigen Differentialgleichungen behandeln, denen die genannten Functionen Genüge leisten.

Die Theorien, die der erste Theil behandelt, können am besten aus dem ausführlichen Inhaltsverzeichniss ersehen werden. Dieselben sollen neben Anderem über die Stellung der Functionen zweiter und dritter Art in der Theorie der gesammten doppeltperiodischen Functionen orientiren und können nach dieser Richtung hin als Einleitung in den zweiten Band angesehen werden.

Es ist dem vorliegenden Bande eine grössere Anzahl von Literaturangaben beigefügt worden. Auf Vollständigkeit sollen dieselben keinen Anspruch machen, insbesondere ist die ältere Literatur, vor Allem soweit sie sich auf die grundlegenden Arbeiten von Jacobi und Abel bezieht, wenig berücksichtigt worden. Es ist das geschehen, weil einerseits dieser Theil der Literatur mehrfach genauer behandelt worden ist, so in den citirten Werken von Enneper und Mansion, in einer Monographie von Koenigsberger u. s. f., andererseits weil die Arbeiten von Jacobi und Abel thatsächlich zum Gemeingut der Mathematiker geworden sind.

Bei der Zusammenstellung haben sich die Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik, die gegenwärtig von Herrn Lampe herausgegeben werden, von grösstem Nutzen gezeigt, da es mir nicht immer möglich war, die Originalarbeiten selbst einzusehen.

Herrn Dr. Naetsch spreche ich für seine liebenswürdige Beihülfe beim Lesen der Correcturbogen meinen verbindlichsten Dank aus.

Dresden, Juli 1895.

M. Krause.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Functionentheorie nach Weierstrass.

Zweiter Abschnitt.

Die Theorie der doppeltperiodischen Functionen auf Grund der Theorie der gewöhnlichen Thetafunctionen.

Dritter Abschnitt.

Die Transformation der elliptischen Functionen nebst Anwendungen.

Vierter Abschnitt.

Die Theorie der doppeltperiodischen Functionen auf Grund der Thetafunctionen mit gebrochener Charakteristik.

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Functionentheorie nach Weierstrass.

---

§ 1.[1])

Definition und einfachste Eigenschaften der Potenzreihen einer Veränderlichen.

Das Fundament aller folgenden Betrachtungen bildet die Potenzreihe einer Veränderlichen x. Wir verstehen unter einer solchen eine jede unendliche Reihe von der Form:

$$1)\qquad G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots = \sum_0^{\infty} {}^n a_n x^n,$$

wobei die Grössen a_n beliebige complexe Constanten bedeuten, während unter x eine beliebige complexe Veränderliche zu verstehen ist.

Es sollen nun zunächst die einfachsten Sätze über die aufgestellten Reihen entwickelt, insbesondere die Art ihrer Convergenz untersucht werden. Hierzu dienen die folgenden Untersuchungen.

> **Lehrsatz:** Wenn eine Grösse x_1 derart bestimmt werden kann, dass alle Glieder $a_n x_1^n$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich einer positiven endlichen Grösse g sind, so convergirt die Potenzreihe für alle Werthe von x, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als x_1.

Zum Beweise bezeichnen wir die absoluten Beträge der Grössen a_n durch die entsprechenden Buchstaben α_n, setzen also dem Vorgange von Weierstrass folgend:

$$|a_n| = \alpha_n,$$

wir bezeichnen ferner die absoluten Beträge von x resp. x_1 durch ξ resp. ξ_1. Dann wäre der verlangte Satz bewiesen, wenn wir nachweisen könnten, dass die Reihe:

$$2)\qquad \alpha_0 + \alpha_1 . \xi + \cdots \alpha_n \xi^n + \cdots$$

für alle Werthe von ξ convergirt, die kleiner sind als ξ_1.

Nun ist nach Annahme:

$$\alpha_n \xi_1^n \leq g, \text{ also:}$$

$$\alpha_n \leq g \frac{1}{\xi_1^n},$$

$$\alpha_n \xi^n \leq g \frac{\xi^n}{\xi_1^n}.$$

Hieraus folgt, dass die Reihe 2) convergiren wird, wenn die Reihe convergirt:

$$g\left(1 + \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi^2}{\xi_1^2} + \cdots \frac{\xi^n}{\xi_1^n} + \cdots\right),$$

und diese convergirt in der That für alle Werthe von ξ, die kleiner sind als ξ_1. Hiermit ist der verlangte Beweis geliefert.

Wir wollen nun von 0 anfangend x eine continuirliche Reihe von Werthen durchlaufen lassen, deren absolute Beträge beständig wachsen. Dann sind zwei Fälle möglich. Entweder bleibt die Ungleichung:

$$|a_n x^n| \leq g$$

für alle endlichen x bestehen, wie gross deren absoluter Betrag auch angenommen werden möge, oder aber dasselbe ist nicht der Fall. Im ersten Falle muss dann die Reihe für alle endlichen Werthe der Veränderlichen convergiren. Eine derartige Reihe nennt man eine **beständig convergirende Potenzreihe.** Ein Beispiel hierfür bietet die Exponentialreihe dar:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Im zweiten Falle muss es für die absoluten Beträge der Grössen x eine obere Grenze ϱ derart geben, dass für alle Werthe von x, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich ϱ sind, die Ungleichung:

$$|a_n x^n| \leq g$$

erfüllt wird, dagegen nicht mehr, wenn der absolute Betrag von x grösser wird als ϱ.

Hieraus folgt, dass die vorgelegte Reihe für alle diejenigen Werthe von x convergiren muss, die der Ungleichung Genüge leisten:

$$|x| < \varrho,$$

divergiren muss für alle diejenigen Werthe von x, die der Ungleichung Genüge leisten:

$$|x| > \varrho.$$

Für diejenigen Punkte, deren absoluter Betrag gleich ϱ ist, bleibt das Verhalten der Potenzreihe ungewiss. Die letzten Resultate lassen

eine einfache geometrische Deutung zu. Diejenigen Punkte, für welche der absolute Betrag kleiner ist als ϱ, liegen im Innern eines Kreises, welcher um den Nullpunkt mit dem Radius ϱ beschrieben ist, während diejenigen Punkte, deren absoluter Betrag grösser als ϱ ist, ausserhalb desselben gelegen sind. Die Punkte endlich, deren absoluter Betrag gleich ϱ ist, bilden die Peripherie des definirten Kreises. Wir wollen denselben mit dem Namen des Convergenzkreises bezeichnen und ϱ den Radius desselben oder schlechthin den Convergenzradius nennen.

Hierbei kann es eintreten, dass der Convergenzkreis in einen einzigen Punkt, in den Anfangspunkt übergeht. Ein Beispiel hierfür bietet die Reihe dar:

$$1 + x + 1.2\,x^2 + \cdots n!\,x^n + \cdots,$$

die für keinen von Null verschiedenen Werth von x convergent ist. Derartige Reihen wollen wir ein für alle Mal von der Betrachtung ausschliessen.

Der erste Fall endlich kann als besonderer Fall des zweiten angesehen werden, wenn wir zulassen, dass der Radius des Convergenzkreises unendlich gross wird.

Versteht man unter Convergenzbereich einer jeden von x abhängigen unendlichen Reihe den Complex aller derjenigen Werthe von x, für welche die Reihe convergent ist, so können wir die letzten Betrachtungen in dem folgende Satze zusammenfassen:

Lehrsatz: Der Convergenzbereich einer jeden Potenzreihe von x ist entweder das Innere oder das Innere und ein Theil der Peripheriepunkte eines Kreises, welcher um den Nullpunkt beschrieben ist.

Hierbei ist es wenigstens zunächst nicht ausgeschlossen, dass jener Theil der Peripheriepunkte mit allen Peripheriepunkten zusammenfällt. Wir werden uns erst später überzeugen, dass ein solches Zusammenfallen thatsächlich unmöglich ist.

Im Anschluss hieran wollen wir sagen, ein Punkt liegt im Innern, auf der Grenze, ausserhalb des Convergenzbereiches, wenn er im Innern, auf der Peripherie, ausserhalb des Convergenzkreises gelegen ist.

Wir kommen nun zu einem weiteren

Lehrsatz: Es sei eine beliebige Potenzreihe vorgelegt, welche ein constantes Glied a_0 besitzt. Dann kann man der Veränderlichen x eine positive Grösse ξ_1, die von Null

verschieden ist, so zuordnen, dass für alle Werthe von x, die der Ungleichheit Genüge leisten:

$$|x| \leqq \xi_1,$$

die ganze Potenzreihe von a_0 sich um weniger als eine beliebig klein vorgelegte Grösse ε unterscheidet.

Zum Beweise führen wir dieselben Bezeichnungen ein wie früher. Die vorgelegte Potenzreihe sei:

$$G(x) = a_0 + a_1 . x + a_2 . x^2 + \cdots a_n . x^n + \cdots$$

Die absoluten Beträge der Grössen a bezeichnen wir durch die entsprechenden Buchstaben α, den absoluten Betrag von x durch ξ.

Dann wäre der verlangte Beweis geführt, wenn wir zeigen könnten, dass für alle Werthe von $\xi \leqq \xi_1$ der Werth der Reihe:

$$\alpha_1 . \xi + \alpha_2 . \xi^2 + \cdots \alpha_n . \xi^n + \cdots$$

kleiner ist als eine beliebig klein vorgelegte positive Grösse ε'.

Dazu nehmen wir irgend einen Werth ξ_2, für welchen die Potenzreihe convergent ist. Dann ist jedenfalls:

$$\alpha_n \xi_2^n \leqq g,$$

wobei g eine endliche positive Grösse bedeutet und n der Reihe nach die Werthe $1, 2, 3 \ldots$ annehmen kann.

Hieraus folgt:

$$\alpha_n \xi^n \leqq g \left(\frac{\xi}{\xi_2}\right)^n.$$

Hieraus wiederum schliessen wir, dass der Beweis nur für die Reihe geführt zu werden braucht:

$$\frac{\xi}{\xi_2} + \frac{\xi^2}{\xi_2^2} + \cdots \frac{\xi^n}{\xi_2^n} + \cdots,$$

um ihn zu gleicher Zeit für die ursprüngliche Reihe geführt zu haben. Nehmen wir die Annahme hinzu, dass $\xi < \xi_2$ ist, so ist aber der Werth der letzten Reihe gleich:

$$\frac{\xi}{\xi_2} \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\xi_2}}.$$

Hiermit ist aber alles gethan. Wir können immer einen Werth für ξ, den Werth $\xi = \xi_1$, so bestimmen, dass dieser Ausdruck kleiner ist als eine beliebig klein vorgelegte Grösse ε'. Dann bleibt derselbe kleiner als ε', wenn wir ξ Werthe beilegen, die kleiner als ξ_1 sind, und damit ist der Satz bewiesen.

Ganz analog wird der folgende Satz bewiesen:

Lehrsatz: Es sei eine Potenzreihe vorgelegt:

$$a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n + \cdots$$

x_1 ein Punkt im Innern des Convergenzbereiches, dann kann man stets eine endliche Anzahl von Gliedern

$$a_0 + a_1 x + \cdots a_n . x^n$$

derart absondern, dass die Summe aller anderen für alle Werthe von x, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich x_1 sind, kleiner bleibt als eine beliebig klein vorgelegte Grösse ε.

§ 2.

Taylor'scher Lehrsatz für Potenzreihen einer Veränderlichen nebst Folgerungen. Fortsetzung einer Potenzreihe über den Convergenzbereich hinaus.

Es sei eine Potenzreihe vorgelegt:

$$1) \qquad a_0 + a_1 . x + \cdots a_n . x^n + \cdots$$

x ein beliebiger Punkt im Innern des Convergenzkreises. Denken wir uns dann an Stelle von x die Grösse $x + h$ gesetzt, so erhalten wir die Reihe:

$$a_0 + a_1 (x + h) + a_2 (x^2 + 2 x h + h^2) + \cdots a_n (x^n + n . x^{n-1} . h + \cdots h^n) + \cdots$$

die in der vorliegenden Reihenfolge der Glieder sicher convergiren wird, wenn h so gewählt ist, dass $x + h$ im Innern des Convergenzbereiches gelegen ist. Es fragt sich, wann sind wir berechtigt, die Glieder der Reihe beliebig anzuordnen, insbesondere dieselben nach Potenzen von h zu ordnen.

Es gilt bekanntlich der Satz, dass eine jede Reihe beliebig angeordnet werden kann, ohne ihren Werth zu ändern, wenn die entsprechende Reihe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder convergent ist. Nennen wir daher den absoluten Betrag von $h : \eta$, so folgt, dass eine beliebige Umordnung für alle diejenigen Werthe von x und h möglich ist, für welche die Reihe convergirt:

$$\alpha_0 + \alpha_1 (\xi + \eta) + \alpha_2 (\xi^2 + 2 \eta \xi + \eta^2) + \cdots$$

oder was dasselbe sagt, für welche der Punkt $\xi + \eta$ im Innern des Convergenzkreises gelegen ist, oder auch für welche

$$|x| + |h| < \varrho$$

ist, wobei ϱ den Radius des Convergenzkreises bedeutet.

Für alle diese Werthe von x und h können wir dann schreiben:

$$2)\quad G(x+h) = G(x) + G'(x)h + \frac{G''(x)}{1.2}h^2 + \cdots \frac{G^n(x)}{n!}h^n + \cdots,$$

wobei die Grössen $G'(x)$, $G''(x), \ldots$ eindeutig definirte convergirende Potenzreihen von x sind und zwar:

$$G'(x) = a_1 + 2.a_2.x + 3.a_3.x^2 + \cdots n.a_n.x^{n-1} + \cdots,$$
$$G''(x) = 2a_2 + 2.3.a_3.x + \cdots n.(n-1).a_n x^{n-2} + \cdots$$

Diese Potenzreihen bezeichnet man mit dem Namen der ersten, zweiten etc. abgeleiteten Reihe der ursprünglichen im Punkte x. Bei dieser Definition ist dann zu gleicher Zeit auch der Existenzbeweis der sämmtlichen abgeleiteten Reihen für alle diejenigen Punkte x gegeben, die im Innern des Convergenzkreises gelegen sind. Halten wir einen solchen Punkt x fest, so convergirt dann die Potenzreihe von h, die für $G(x+h)$ gefunden worden ist, für alle diejenigen Werthe von h, für welche $\xi + \eta < \varrho$ ist, oder geometrisch gesprochen, wie sofort klar ist, für alle diejenigen Werthe von h, die zu Punkten $x+h$ gehören, die im Innern eines Kreises gelegen sind, der um den Punkt x als Mittelpunkt beschrieben ist und den ursprünglichen Kreis von innen berührt. Es ist hierbei nicht ausgeschlossen, dass die Convergenz noch für weitere Werthe von h stattfindet, indessen kann ein allgemeiner Satz hierfür zunächst nicht erbracht werden.

Wir fassen die letzten Betrachtungen in dem folgenden Satze zusammen, den wir als den Taylor'schen Satz für Potenzreihen einer Veränderlichen bezeichnen können:

Lehrsatz: Es sei eine beliebige Potenzreihe von x vorgelegt, x ein Punkt im Innern ihres Convergenzbereiches. Um denselben werde ein Kreis beschrieben, welcher den ursprünglichen von innen berührt, dann kann für alle Punkte $x+h$, die im Innern desselben gelegen sind, $G(x+h)$ nach Potenzen von h geordnet werden. Der Coefficient von $\frac{h^n}{n!}$ ist die n^{te} abgeleitete Reihe der ursprünglichen im Punkte x.

Aus diesem Lehrsatz folgt eine wichtige Eigenschaft der Potenzreihen, die nach den verschiedensten Seiten hin von Bedeutung ist. Wir können die Gleichung 2) auch schreiben:

$$G(x+h) - G(x) = G'(x)h + \frac{G''(x)}{1.2}h^2 + \cdots$$

Sehen wir die rechte Seite als Potenzreihe von h an, so fehlt das constante Glied. Wir können unter solchen Umständen einen unserer früheren Sätze anwenden und finden, dass h immer eine solche positive Grösse η zugeordnet werden kann, dass für alle Werthe von h, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich η sind, die Differenz:

$$G(x+h) - G(x)$$

dem absoluten Betrage nach kleiner wird als eine beliebig klein vorgelegte Grösse ε.

Diese Eigenschaft drücken wir kurz dadurch aus, dass wir sagen, die Potenzreihe ist im Punkte x stetig. Wir finden somit den

Lehrsatz: Eine Potenzreihe ist in jedem Punkte, welcher im Innern des Convergenzbereiches gelegen ist, stetig.

Auf der Eigenschaft der Stetigkeit beruht ein weiterer wichtiger Satz aus der Theorie der Potenzreihen.

Lehrsatz: Wird eine Potenzreihe für alle Punkte eines endlichen, noch so kleinen Linienstückes, welches durch den Nullpunkt hindurchgeht, beständig Null, so müssen ihre sämmtlichen Coefficienten verschwinden.

In der That, bezeichnen wir die vorgelegte Potenzreihe wie früher durch:

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

so muss jedenfalls $a_0 = 0$ sein, da die Reihe im Punkte $x = 0$ verschwinden soll. Wir können sie also schreiben:

$$x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots).$$

Da dieselbe für alle Punkte eines Linienstückes verschwinden soll, welches durch den Nullpunkt hindurchgeht, so muss für alle diese Punkte mit Ausnahme des Nullpunktes die Reihe verschwinden:

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$$

Da nun die Punkte beliebig nahe an den Nullpunkt heranrücken können, so folgt aus der Eigenschaft der Stetigkeit, dass die Reihe:

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$$

auch im Nullpunkte verschwinden muss, d. h. es muss $a_1 = 0$ sein. In derselben Weise kann bewiesen werden, dass auch ein jeder folgende Coefficient der Null gleich sein muss.

Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt mit wenigen Schlüssen der folgende

Lehrsatz: Wenn zwei Potenzreihen von x für alle Punkte eines endlichen noch so kleinen Linienstückes übereinstimmen, welches durch den Nullpunkt hindurchgeht, so

sind sie identisch einander gleich, d. h. die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x stimmen in beiden Reihen überein.

In der That, die beiden vorgelegten Reihen seien die Reihen:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

Bilden wir dann die Potenzreihe:

$$a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \cdots (a_n - b_n)x^n + \cdots,$$

so wird diese für alle Punkte des definirten Linienstückes gleich Null, mithin wird nach dem vorigen Satze:

$$a_n - b_n = 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Dieser Satz kann verallgemeinert werden. Dazu denken wir uns zwei Potenzreihen um die beiden Punkte $x = a$ und $x = b$ herum vorgelegt. Dieselben mögen lauten:

$$3)\quad G(x \mid a) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots a_n(x - a)^n + \cdots,$$

$$4)\quad G_1(x \mid b) = b_0 + b_1(x - b) + b_2(x - b)^2 + \cdots b_n(x - b)^n + \cdots$$

Der Convergenzkreis der ersten ist ein Kreis um den Punkt $x = a$, der zweiten um den Punkt $x = b$. Es kann nun sehr wohl eintreten, dass die beiden Convergenzkreise ein gemeinsames Stück besitzen. Dann gilt der folgende

Lehrsatz: Stimmen zwei Potenzreihen $G(x \mid a)$ und $G_1(x \mid b)$ für alle Punkte eines endlichen, noch so kleinen Linienstückes überein, welches durch einen Punkt c im Innern des gemeinsamen Convergenzbereiches hindurchgeht, so stimmen sie für alle Punkte im Innern des gemeinsamen Convergenzbereiches überein.

Zum Beweise greifen wir im Innern des gemeinsamen Convergenzbereiches einen beliebigen weiteren Punkt c' heraus und zeigen, dass die beiden Potenzreihen in ihm denselben Werth besitzen müssen.

Dazu verbinden wir die beiden Punkte c und c' durch eine Linie, die ganz im Innern des gemeinsamen Convergenzbereiches gelegen ist. Die kürzeste Entfernung derselben von den einzelnen Punkten der beiden Kreisperipherien bezeichnen wir durch d, dann können wir den Weg jedenfalls immer so wählen, dass d eine endliche von Null verschiedene Grösse ist. Jeder mit dem Radius d um einen beliebigen Punkt der Verbindungslinie geschlagene Kreis liegt dann im Innern des gemeinsamen Convergenzbereiches. Nun kann man nach bekannten Regeln aus $G(x \mid a)$ eine Potenzreihe um den Punkt $x = c$ herum ent-

wickeln. Dieselbe möge durch $G(x\,|\,a\,|\,c)$ bezeichnet werden. Sie stimmt mit der ursprünglichen dann jedenfalls für alle Punkte des Kreises überein, welcher um c mit dem Radius d beschrieben ist, d. h. für die Punkte im Innern desselben, so dass für dieselben die Gleichung besteht:

$$G(x\,|\,a) = G(x\,|\,a\,|\,c).$$

Analog kann aus $G_1(x\,|\,b)$ eine Potenzreihe um den Punkt c herum entwickelt werden. Dieselbe werde bezeichnet durch $G_1(x\,|\,b\,|\,c)$. Dann ist wiederum für die Punkte im Innern des Kreises, welcher mit dem Radius d um c beschrieben ist:

$$G_1(x\,|\,b) = G_1(x\,|\,b\,|\,c).$$

Nun stimmen für ein Linienstück durch c die beiden Potenzreihen $G(x\,|\,a)$ und $G_1(x\,|\,b)$ überein, also — soweit das Linienstück im Innern des Kreises mit dem Radius d gelegen ist — die beiden Reihen $G(x\,|\,a\,|\,c)$ und $G_1(x\,|\,b\,|\,c)$ auch. Diese sind um denselben Punkt c herum entwickelt, müssen also nach dem früheren Satze einander identisch gleich sein, jedenfalls also für alle Punkte des Kreises um c mit dem Radius d übereinstimmen. In Folge dessen muss dasselbe für die beiden Reihen $G(x\,|\,a)$ und $G_1(x\,|\,b)$ der Fall sein. Auch sie müssen für alle Punkte übereinstimmen, die in dem Kreise gelegen sind, der um c mit dem Radius d beschrieben ist. Nun nehmen wir auf der Verbindungslinie der beiden Punkte c und c' einen dritten Punkt c_1 nahe der Peripherie des Kreises an. Mit diesem können wir dann operiren wie mit dem ursprünglichen. Beschreiben wir um c_1 einen Kreis mit dem Radius d, so müssen auch für alle Punkte in dessen Innern die beiden Potenzreihen $G(x\,|\,a)$ und $G_1(x\,|\,b)$ übereinstimmen. So geht das fort, bis wir schliesslich nach einer endlichen Anzahl von Operationen zu einem Kreise gelangen, in dessen Innern der Punkt c' gelegen ist und für den die beiden Potenzreihen auch übereinstimmen müssen. Hiermit ist der verlangte Beweis geliefert. Diese letzten Untersuchungen führen zu einer ungemein wichtigen neuen Definition.

Denken wir uns einen beliebigen Punkt a im Innern des Convergenzbereiches einer Potenzreihe von x herausgegriffen und für ihn die entsprechende Potenzreihe nach Potenzen von $x-a$ nach dem Taylor'schen Satze abgeleitet. Der Convergenzkreis umfasst dann jedenfalls den Kreis um a, welcher den ursprünglichen von innen berührt. Für die Punkte im Innern desselben findet dann Uebereinstimmung der ursprünglichen Reihe $G(x)$ und der zweiten für den Punkt $x=a$ statt. Wir bezeichnen letztere durch $G(x\,|\,a)$. Nun ist es begrifflich nicht ausgeschlossen, dass der Convergenzbereich von $G(x\,|\,a)$ weiter reicht als der soeben definirte Kreis um a. Die Potenzreihe für $log(1+x)$

bietet hierfür ein einfaches Beispiel. Dann werden die beiden Potenzreihen $G(x)$ und $G(x \mid a)$ nach den entwickelten Sätzen in dem gemeinsamen Convergenzbereich übereinstimmen müssen und zwar im Innern desselben. Der Convergenzbereich von $G(x \mid a)$ reicht aber weiter. Man bezeichnet unter solchen Umständen den Theil von $G(x \mid a)$, welcher zu den nicht gemeinsamen Punkten gehört, mit dem Namen der Fortsetzung der ursprünglichen Potenzreihe $G(x)$. Es wird unsere nächste Aufgabe sein, die hierbei stattfindenden Möglichkeiten näher zu untersuchen. An dieser Stelle möge nur noch bemerkt werden, dass zwei Potenzreihen, die um zwei Punkte a und a_1 im Innern des Convergenzbereiches einer vorgelegten Potenzreihe mit Hülfe des Taylor'schen Satzes aus letzterer entwickelt worden sind, im Innern des gemeinsamen Convergenzbereiches die nämlichen Werthe besitzen.

§ 3.

Ableitung einer Beziehung zwischen den Coefficienten und Werthen einer Potenzreihe.

Für das Folgende ist ein Satz von Cauchy von Bedeutung, welcher eine Beziehung zwischen den Coefficienten und den Werthen einer Potenzreihe feststellt. Wir wollen denselben folgendermassen aussprechen:

Lehrsatz: Bedeutet g die obere Grenze der absoluten Beträge der Werthe, welche die Potenzreihe:

$$1)\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots$$

für die Punkte der Peripherie eines Kreises annimmt, der um den Nullpunkt mit dem Radius ϱ beschrieben und ganz innerhalb des Convergenzkreises der Reihe gelegen ist, so finden die Ungleichungen statt:

$$|a_n| \leqq g \cdot \varrho^{-n}.$$

Den Beweis geben wir nach dem Vorgange von Weierstrass.

Wir betrachten zunächst den Ausdruck:

$$2)\qquad a x^m,$$

wobei m eine beliebige ganze positive oder negative von Null verschiedene Zahl bedeutet.

In demselben setzen wir an Stelle von x Werthe, deren absoluter Betrag gleich ϱ ist. Dieselben haben dann die Form:

$$x = \varrho \cdot \xi^{\lambda},$$

wo ξ den absoluten Betrag 1 besitzt. Wir wollen festsetzen, dass es so gewählt sei, dass ξ^m von 1 verschieden ist. Es ist das immer auf unendlich mannigfaltige Weise möglich.

Dann bilden wir den Ausdruck:

$$\frac{1}{l}\sum_{0}^{l-1}{}_{\lambda}\, a(\varrho\,\xi^{\lambda})^{m},$$

in welchem l eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Dieser Ausdruck ist gleich:

$$\frac{a\varrho^{m}}{l}\,\frac{\xi^{lm}-1}{\xi^{m}-1},$$

wird also, wenn jetzt l immer mehr und mehr wächst, sich der Grenze Null nähern.

Betrachten wir zweitens den Ausdruck:

$$3)\qquad F(x) = ax^{m} + a_1 x^{m_1} + \cdots,$$

wobei über $m, m_1, \ldots$ dasselbe zu bemerken ist wie vorhin über m, wo ferner die Anzahl der Summanden eine endliche ist, so wird auch:

$$\lim \frac{1}{l}\sum_{0}^{l-1}{}_{\lambda}\, F(\varrho\,\xi^{\lambda}) = 0,$$

für $l = \infty$ sein, wenn wir noch die Annahme hinzufügen, dass ξ keiner der Gleichungen Genüge leistet:

$$x^{m} = 1,\quad x^{m_1} = 1, \ldots$$

eine Annahme, welcher unendlich viele Werthe von ξ Genüge leisten.

Nehmen wir also drittens den Ausdruck:

$$4)\qquad F_1(x) = a_0 + ax^{m} + a_1 x^{m_1} + \cdots,$$

der sich von dem vorigen nur um die Constante a_0 unterscheidet, so folgt:

$$\lim_{l=\infty} \frac{1}{l}\sum_{0}^{l-1}{}_{\lambda}\, F_1(\varrho\,\xi^{\lambda}) = a_0.$$

Die Werthe $\varrho\,\xi^{\lambda}$ werden durch Punkte repräsentirt, die auf einem Kreise liegen, der um den Nullpunkt mit dem Radius ϱ beschrieben ist. Wir fassen nun alle Punkte ins Auge, die auf dieser Peripherie gelegen sind. Zu ihnen gehören ganz bestimmte absolute Beträge der Function $F_1(x)$. Die obere Grenze derselben bezeichnen wir durch g, so ist g jedenfalls eine endliche positive Grösse, ferner:

$$\left|\frac{1}{l}\sum_{0}^{l-1}{}_{\lambda}\, F_1(\varrho\,\xi^{\lambda})\right| \leqq g.$$

Hieraus folgt:

$$|a_0| \leqq g.$$

Hiermit haben wir die Hauptschwierigkeit des allgemeinen Beweises überwunden. In der That sei nun eine Potenzreihe vorgelegt:

5) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots,$$

ϱ eine positive Grösse kleiner als der Convergenzradius, dann wollen wir beide Seiten mit x^{-n} multipliciren d. h. bilden:

$$x^{-n}.f(x) = a_0 . x^{-n} + a_1 . x^{-n+1} + \cdots a_n + a_{n+1} . x + \cdots$$

und die rechte Seite schreiben:

$$f_1(x) + f_2(x),$$

wobei gesetzt ist:

$$f_1(x) = a_0 . x^{-n} + \cdots a_n + a_{n+1} . x + \cdots a_{n+m} . x^m,$$
$$f_2(x) = a_{n+m+1} x^{m+1} + a_{n+m+2} x^{m+2} + \cdots$$

Nach unseren früheren Sätzen können wir dann m immer so gross wählen, dass der absolute Betrag von $f_2(x)$ für alle Werthe von x, die ihrem absoluten Betrage nach gleich ϱ sind, kleiner wird als eine beliebig klein vorgelegte Grösse ε. $f_1(x)$ besteht aus einer endlichen Anzahl von Gliedern. Nennen wir die ihr entsprechende obere Grenze g_1, so folgt:

$$|a_n| \leqq g_1.$$

Nennen wir also die obere Grenze der absoluten Beträge von $f(x)$ für die definirten Werthe von $x : g$, so folgt mit Hülfe der einfachsten Schlüsse:

$$|a_n| \leqq g . \varrho^{-n}$$

und damit ist die Richtigkeit des Satzes nachgewiesen.

§ 4.

Anderweite Charakterisirung des Convergenzkreises.

Wir haben seiner Zeit die Definition des Convergenzkreises gegeben. Es fragt sich, ob wir das Wesen desselben nicht noch auf eine andere Art charakterisiren können. Wir fragen dazu ganz allgemein: woran liegt es, dass eine Potenzreihe aufhört zu convergiren? Die Beantwortung dieser Frage soll zunächst in einer sehr abstracten Form geschehen und zwar durch folgenden

Lehrsatz: Es sei eine Potenzreihe $G(x)$ vorgelegt. Dieselbe möge sicherlich für alle Punkte im Innern eines Kreises mit dem Radius r convergiren. Für alle diese Punkte a seien aus der ursprünglichen Reihe die entsprechenden Potenzreihen $G(x|a)$ abgeleitet. Zu ihnen gehören bestimmte Convergenzradien. Dieselben seien bestimmt und mögen als untere Grenze die Grösse d besitzen, dann ist der wirkliche Convergenzradius der Reihe $G(x)$ gleich $r + d$.

In der That, es sei:

1) $$G(x) = \Sigma a_n \, . \, x^n.$$

Nach Annahme convergirt diese Reihe sicherlich für alle Werthe $x = a$, für welche

$$|a| < r$$

ist. Sei ein solcher vorgelegt, so lautet die abgeleitete Potenzreihe für denselben:

$$G(x \mid a) = \sum \frac{G^\nu(a)}{\nu!} (x - a)^\nu.$$

Diese Reihe ist nach Voraussetzung convergent, wenn:

$$|a| < r \quad \text{und} \quad |x - a| < d$$

ist. Es sei d_1 kleiner als d. Um a beschreiben wir einen Kreis mit dem Radius d_1 und lassen a selbst alle Werthe durchlaufen, die denselben absoluten Betrag α besitzen. Es sei dann g die obere Grenze der Werthe $G(x \mid a)$ für alle Stellen der Kreislinien:

$$|x - a| = d_1$$

und für alle Werthe von a, deren absoluter Betrag gleich α ist. Diese Grösse g ist endlich. Dann folgt vermöge des Lehrsatzes des vorigen Paragraphen:

$$\frac{1}{\nu!} \, | G^\nu(a) | \leqq g d_1^{-\nu}$$

oder auch:

$$\frac{1}{\nu!} \left| \sum_{\mu=\nu}^{\mu=\infty} \mu \; \mu - 1 \ldots \mu - \nu + 1 \; a_\mu \, . \, a^{\mu-\nu} \right| \leqq g d_1^{-\nu}.$$

Hieraus wiederum folgt:

$$\frac{\mu \; \mu - 1 \ldots \mu - \nu + 1}{\nu!} \, \alpha_\mu \leqq g \, . \, d_1^{-\nu} \, . \, \alpha^{\nu-\mu}$$

oder auch:

$$\mu_\nu \, . \, \alpha_\mu \, . \, \alpha^\mu \frac{d_1^\nu}{r^\nu} \leqq g \, \frac{\alpha^\nu}{r^\nu}.$$

Bildet man daher die Summe:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu} \mu_\nu \, . \, \alpha_\mu \, . \, \alpha^\mu \frac{d_1^\nu}{r^\nu} = \alpha_\mu \, . \, \alpha^\mu \left(1 + \frac{d_1}{r}\right)^\mu,$$

so ist dieselbe vermöge der letzten Ungleichung:

$$\leqq g \, \frac{1 - \dfrac{\alpha^{\mu+1}}{r^{\mu+1}}}{1 - \dfrac{\alpha}{r}} < g \, \frac{r}{r - \alpha}.$$

Es bleiben also die Grössen

$$\alpha_\mu \left(\alpha + \frac{\alpha d_1}{r}\right)^\mu$$

für alle Werthe von μ kleiner als eine angebbare Grösse. Unter solchen Umständen muss die Reihe:

$$G(x) = \Sigma a_\mu x^\mu$$

für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag

$$|x| < \alpha + \frac{\alpha d_1}{r}$$

ist, convergiren. Hieraus folgt dann der Beweis des Satzes mit Hülfe weniger Schlüsse, wenn wir noch hinzunehmen, dass der Convergenzradius der ursprünglichen Reihe sicher nicht grösser als $r + d$ sein kann.

Es sei nun eine Potenzreihe von x vorgelegt. Ihr Convergenzradius sei r. Dann möge um den Nullpunkt ein Kreis mit dem Radius $\frac{r}{2}$ geschlagen werden. Durch denselben wird das Innere des Convergenzkreises in zwei Theile getheilt, von denen der eine die Kreisfläche mit dem Radius $\frac{r}{2}$, der andere ein Kreisring ist, dessen begrenzende Peripherien die Radien $\frac{r}{2}$ resp. r haben. Denken wir uns nun für die Punkte des ersten Stückes die fortgesetzten Reihen gebildet und die untere Grenze der dazu gehörenden Convergenzradien gebildet, so kann diese sicherlich nicht gleich Null sein.

Hieraus folgt, dass wenn wir für die Punkte des Ringes die entsprechenden Operationen vornehmen, hier die untere Grenze der Convergenzradien sicherlich gleich Null sein muss. Nun ziehen wir einen dritten Kreis mit dem Radius $\frac{3r}{4}$. Derselbe theilt den Kreisring in zwei Theile. Es ist klar, dass dann nur für die Punkte des äusseren Ringes, der von den Kreisen mit den Radien $\frac{3r}{4}$ und r begrenzt ist, die untere Grenze der Convergenzradien gleich Null sein kann und muss. So gehen wir weiter fort. Wir erhalten auf diesem Wege einen beliebig dünnen Kreisring, der von dem ursprünglichen Kreise mit dem Radius r und einem zweiten mit dem Radius $\frac{(2^n - 1)r}{2^n}$ begrenzt ist, so zwar, dass für seine Punkte die untere Grenze der entsprechenden Convergenzradien gleich Null ist, während sie für den übrigen Theil des ursprünglichen Kreises von Null verschieden ist.

Den soeben definirten Kreisring denken wir uns nun durch eine Linie durch den Nullpunkt in zwei gleiche Theile getheilt. Dann muss mindestens in einem derselben, den wir durch A_1 bezeichnen wollen, die untere Grenze der entsprechenden Convergenzradien gleich Null sein. Diesen theilen wir wieder in zwei Theile und so fort.

Setzen wir diese Operation beliebig oft fort, so kommen wir als Grenze zu einem Punkte, der auf der Peripherie des Convergenzkreises gelegen sein muss. Die Eigenschaften desselben, sowie die letzten Betrachtungen fassen wir zusammen in dem folgenden

Lehrsatz: Auf der Peripherie des Convergenzkreises einer Potenzreihe $G(x)$ muss mindestens ein Punkt gelegen sein, welcher die folgenden Eigenschaften besitzt. Beschreibt man um ihn einen Kreis von beliebig kleinem Radius und greift das Flächenstück heraus, welches diesem und dem ursprünglichen Kreise gemeinsam ist, so muss die untere Grenze der Convergenzradien der abgeleiteten Reihen, die zu den einzelnen Punkten dieses Flächenstückes gehören, gleich Null sein.

Wir können an Stelle dieses Lehrsatzes einen anderen etwas anschaulicheren geben. Sei c ein Punkt der Art, wie er in dem letzten Lehrsatz charakterisirt worden ist. Wir behaupten dann, dass dieser Punkt c niemals im Innern des Convergenzbereiches einer Potenzreihe gelegen sein kann, welche unmittelbar aus der ursprünglichen mit Hülfe des Taylor'schen Lehrsatzes abgeleitet werden kann.

Zum Beweise nehmen wir an, der Satz wäre falsch, c liege im Innern des Convergenzbereiches einer Potenzreihe um den Punkt a, die aus der ursprünglichen durch unmittelbare Fortsetzung gewonnen ist. Hierbei ist a ein Punkt im Innern des ursprünglichen Convergenzkreises. Umgiebt man dann c mit einem Kreise mit dem Radius ϱ, welcher ganz innerhalb des Kreises um a gelegen ist, und nennt die kleinste Entfernung der Punkte der Peripherie des letzteren von denen des vorigen d, so können wir die Construction jedenfalls so vornehmen, dass d von Null verschieden ist. Ferner aber können wir für die Punkte, die dem ursprünglichen Convergenzkreise und dem Kreise um c mit dem Radius ϱ gemeinsam sind, die fortgesetzten Reihen bilden und zwar ist es hierbei nach dem früheren gleichgültig, ob wir diese Reihen unmittelbar aus der ursprünglichen oder aus der Reihe um den Punkt a herum bilden. Die Convergenzkreise aller dieser fortgesetzten Reihen haben aber mindestens den Radius d, folglich kann ihre untere Grenze nicht gleich Null sein.

Wir finden daher den folgenden

Lehrsatz: Auf der Peripherie des Convergenzkreises einer Potenzreihe $G(x)$ muss mindestens ein Punkt c liegen, welcher nicht im Innern des Convergenzbereiches einer Potenzreihe gelegen ist, die mit Hülfe des Taylor'schen

Satzes unmittelbar aus der ursprünglichen gewonnen ist und zwar für einen Punkt a, der im Innern des Convergenzbereiches derselben gelegen ist.

Dieser Satz ist mit dem vorigen gleichwerthig.

Wir können uns aber noch einfacher ausdrücken, indem wir den folgenden Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz: Auf der Peripherie des Convergenzkreises einer Potenzreihe $G(x)$ muss mindestens ein Punkt c gelegen sein, für welchen es nicht möglich ist eine Potenzreihe aufzustellen:
$$c_0 + c_1(x-c) + c_2(x-c)^2 + \cdots,$$
welche in dem gemeinsamen Convergenzbereich mit der ursprünglichen übereinstimmt.

Auch dieser Satz ist mit den beiden zuletzt entwickelten gleichwerthig.

§ 5.

Definition der monogenen analytischen Function einer Veränderlichen. Singuläre Punkte.

Allen Punkten, die im Innern des Convergenzbezirkes einer Potenzreihe gelegen sind, entspricht ein fester eindeutiger Werth derselben. Es definirt die Potenzreihe daher für die genannten Punkte eine ganz bestimmte Function. Ueberdies haben wir aber gesehen, dass die Potenzreihe auch über den ursprünglichen Convergenzbereich hinaus fortgesetzt werden kann. Die Beziehungen, die bei dieser Gelegenheit gefunden wurden, sind derart, dass wir die Fortsetzung der Potenzreihe zugleich als Fortsetzung der durch die ursprüngliche Reihe definirten Function ansehen können, so dass die letztere auch ausserhalb des ursprünglichen Convergenzbereiches definirt werden kann. Bei den verschiedenen Möglichkeiten, die hier vorliegen, sind offenbar jene Punkte von besonderer Bedeutung, die wir im vorigen Paragraphen als charakteristische Punkte der Peripherie des Convergenzkreises gefunden haben. Sie werden für die Art der Fortsetzung und damit für die Function selbst von schwerwiegender Bedeutung sein. Wir wollen sie mit dem Namen der singulären Punkte der Function bezeichnen. Es sind nun zwei Fälle möglich. Entweder füllen die singulären Punkte die ganze Peripherie aus oder zweitens dasselbe ist nicht der Fall. In dem zweiten Falle müssen wir dann durch unmittelbare Fortsetzung aus der ursprünglichen Reihe eine zweite erhalten, deren Convergenzbereich über den ersten hinausreicht. Diese Potenzreihe können wir dann für sich zu Grunde legen und mit ihr operiren, wie mit der ursprünglichen. Ihr Convergenzkreis muss auf seiner Peripherie

mindestens einen singulären Punkt besitzen, wobei bei der Definition des singulären Punktes die zweite Reihe als die ursprüngliche zu Grunde zu legen ist u. s. f. Wir können durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu einer unendlichen Anzahl von Potenzreihen kommen, denen für die Punkte innerhalb ihres Convergenzkreises eindeutig bestimmte, feste Werthe zukommen, so zwar, dass wir diese Potenzreihen als verschiedene Darstellungen einer und derselben Function von x ansehen. Die singulären Punkte derselben können auf das Mannigfaltigste gruppirt sein. Ihre Anzahl kann eine endliche oder eine unendliche sein. In letzterem Falle können alle die Möglichkeiten eintreten, die die Mannigfaltigkeitslehre darbietet, sie können Curven, Flächenstücke erfüllen etc. Der Inbegriff aller dieser unendlich vielen Potenzreihen, von denen eine jede aus jeder andern durch Fortsetzung gewonnen werden kann, wie nicht näher auseinandergesetzt zu werden braucht, wird nun nach Weierstrass mit dem Namen der monogenen analytischen Function einer Veränderlichen bezeichnet.

Aufgabe der Functionentheorie ist es, den Begriff der soeben definirten Function in Bezug auf seine Mächtigkeit hin zu untersuchen und die Functionen in Kategorien zu zerfällen, deren Eigenschaften aufgedeckt werden können.

Die Functionen zerfallen nun in zwei grosse Abtheilungen. Gehen wir von einem Punkte a aus, um den herum sich die Function durch eine Potenzreihe darstellen lässt, und kehren auf irgend einem Wege zu demselben zurück, so ist es möglich, dass die Function wieder durch dieselbe Potenzreihe dargestellt wird, oder aber es ergeben sich je nach der Wahl der Wege immer andere und andere Darstellungen. Im ersten Falle nennen wir die Function eine eindeutige, im zweiten dagegen eine mehrdeutige. Wir werden uns in der Folge nur mit den eindeutigen Functionen zu beschäftigen haben, so dass von jetzt an überall da, wo nicht das Gegentheil bemerkt ist, unter einer Function eine eindeutige verstanden werden soll.

§ 6.

Theorie der eindeutigen Functionen von x. Definition der wesentlichen und ausserwesentlichen singulären Punkte. Darstellung aller Functionen, die als einzigen singulären Punkt einen wesentlichen besitzen.

Einen jeden nicht singulären Punkt einer eindeutigen Function nennen wir fortan einen regulären. Im positiven Sinne können wir sagen, dass der Punkt $x = a$ ein regulärer der Function ist, oder auch,

dass die Function sich in seiner Umgebung regulär verhalte, wenn sie sich um ihn herum durch eine Potenzreihe darstellen lässt:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

Das Wort Umgebung ist in der bekannten Bedeutung gebraucht. Diese Definition setzt zunächst a als endlich voraus. Ist $a = \infty$, so soll an Stelle des Ausdruckes $x - \infty$ die Grösse $\frac{1}{x}$ treten.

Ferner sollen die singulären Punkte einer Function $f(x)$ in zwei Kategorien getheilt werden, in die ausserwesentlichen und in die wesentlichen singulären Punkte. Kann $f(x)$ durch Multiplication mit einer ganzen Potenz von $x - a'$ in eine in der Umgebung des Punktes $x = a'$ sich regulär verhaltende Function verwandelt werden, so nennen wir den singulären Punkt a' einen ausserwesentlichen singulären, im entgegengesetzten Fall einen wesentlichen singulären. Für den Unendlichkeitspunkt tritt wiederum an Stelle von $x - a' : \frac{1}{x}$.

Hiernach hat für $x = a$ die Function einen bestimmten Werth nicht nur, wenn $f(x)$ in der Umgebung von a sich regulär verhält, sondern auch, wenn die Stelle a eine ausserwesentliche singuläre ist. Denn in beiden Fällen lässt sich $f(x)$ für hinlänglich kleine Werthe von $x - a$ in die Form bringen:

$$f(x) = (x-a)^{-m}[A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots],$$

wobei m eine ganze Zahl ist und A_0 einen von Null verschiedenen Werth hat; und es ist also, wenn $m > 0$, für jeden unendlich kleinen Werth von $x - a$ der entsprechende Werth von $f(x)$ unendlich gross, und für $x = a$ ergiebt sich $f(x) = \infty$.

Aus dem vorstehenden Ausdruck von $f(x)$ ergiebt sich zugleich, dass innerhalb des Convergenzbezirkes der eingeklammerten Reihe eine singuläre Stelle nicht existirt, wenn $m \overline{\overline{<}} 0$, und nur die eine Stelle a, wenn $m > 0$ ist. Daraus folgt weiter, dass eine Stelle, von der sich nachweisen lässt, dass auch in einer unendlich kleinen Umgebung derselben von ihr verschiedene singuläre Stellen existiren, nothwendig eine wesentliche singuläre Stelle ist.

Wir stellen nun zunächst das Problem: wie sehen alle Functionen aus, die den Unendlichkeitspunkt als einzigen singulären Punkt besitzen und diesen als wesentlichen singulären?

Jedenfalls ist klar, dass derartige Functionen sich sämmtlich durch beständig convergirende Potenzreihen darstellen lassen müssen d. h. durch Potenzreihen, deren Convergenzradius unendlich gross ist. In der That, wäre der Convergenzradius ein endlicher, so müsste auf der Peripherie des Convergenzkreises d. h. im Endlichen ein singulärer Punkt gelegen

sein und das ist gegen die Annahme. Wir beweisen nun aber auch umgekehrt, dass eine jede beständig convergirende Potenzreihe, die nicht im Endlichen abbricht, im Unendlichen einen wesentlichen singulären Punkt besitzt.

Dazu beweisen wir nun zunächst den folgenden

Lehrsatz: Eine jede beständig convergirende Potenzreihe muss ausserhalb eines jeden Kreises mit beliebig grossem Radius Werthe annehmen, die grösser sind, als eine beliebig gross vorgelegte Grösse.

In der That, nehmen wir als Mittelpunkt der einzelnen Kreise etwa den Nullpunkt an und machen die Annahme, der Satz wäre falsch, so zwar, dass die Werthe der Potenzreihe für Punkte ausserhalb der einzelnen Kreise mit den Radien r stets dem absoluten Betrage nach kleiner bleiben als eine endliche positive Grösse g, dann würde nach dem Cauchy'schen Satze folgen:

$$|a_n| \leqq g \,.\, r^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Diese Ungleichheit müsste gelten, wie gross auch r angenommen wird, d. h. die sämmtlichen Coefficienten müssten gleich Null sein. Damit ist ein Widerspruch gefunden und der aufgestellte Lehrsatz als richtig bewiesen.

Auf Grund dieses Satzes ist es nun nicht schwer nachzuweisen, dass eine jede beständig convergirende Potenzreihe den Unendlichkeitspunkt als wesentlichen singulären besitzt. In der That, zunächst ist klar, dass er jedenfalls ein singulärer Punkt sein muss. Wäre er nur ein ausserwesentlicher singulärer, so müsste eine endliche positive ganze Zahl n derart bestimmt werden können, dass das Product von x^{-n} und der vorgelegten Potenzreihe d. h. der Ausdruck:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n f(x) = a_0 \,.\, x^{-n} + a_1 \,.\, x^{-n+1} + \cdots a_n + a_{n+1} \,.\, x + \cdots a_{n+m} x^m + \cdots$$

in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes sich regulär verhält. Das ist aber nicht der Fall. In der That, die rechte Seite zerfällt in zwei Theile, von denen der erste:

$$a_0 \,.\, x^{-n} + a_1 x^{-n+1} + \cdots a_{n-1} x^{-1}$$

immer kleiner und kleiner wird, wenn x immer grösser und grösser wird, während der zweite wiederum eine beständig convergirende Potenzreihe ist. Unter solchen Umständen nimmt der Ausdruck:

$$x^{-n} \,.\, f(x)$$

für wachsende Werthe von x Werthe an, die selbst über alle Grenzen wachsen, mithin kann $f(x)$ in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes sich nicht regulär verhalten.

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Sämmtliche eindeutigen analytischen Functionen von x, die als einzigen singulären Punkt den Unendlichkeitspunkt besitzen und diesen als wesentlichen singulären, lassen sich in der Form von beständig convergirenden Potenzreihen darstellen. Man nennt derartige Functionen ganze transcendente Functionen.

Wir wollen für diese ganzen transcendenten Functionen schon hier den folgenden Satz aufstellen:

Lehrsatz: Wird eine ganze transcendente Function $f(x)$ für einen Werth $x = a$ gleich Null, so ist der Quotient:

$$\frac{f(x)}{x - a}$$

wieder eine ganze transcendente Function.

Der Beweis ergiebt sich sofort, wenn wir erwägen, dass $f(x)$ nach Potenzen von $x - a$ geordnet werden kann, so zwar, dass die neue Reihe wiederum für alle Werthe von x convergirt.

Ebenso einfach sind wir nunmehr im Stande, alle analytischen Functionen aufzustellen, die als einzigen singulären Punkt einen wesentlichen besitzen und zwar den beliebig vorgelegten Punkt $x = a$. Wir haben dazu nur nöthig, in den Reihen, welche die ganzen transcendenten Functionen darstellen, an Stelle von x: $\frac{1}{x - a}$ zu setzen.

Wir erhalten also den

Lehrsatz: Sämmtliche eindeutigen analytischen Functionen von x, die als einzigen singulären Punkt den Punkt $x = a$ besitzen und diesen als wesentlichen singulären, haben die Form $G\left(\frac{1}{x - a}\right)$, wobei $G(x)$ die allgemeinste ganze transcendente Function von x bedeutet.

§ 7.

Untersuchung unendlicher Reihen, die nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreiten.

An die Frage, die im vorigen Paragraphen beantwortet ist, schliesst sich naturgemäss die Frage: wie sehen alle eindeutigen Functionen aus, die als einzige singuläre Punkte zwei wesentliche singuläre besitzen? Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass diese beiden Punkte der Null- und der Unendlichkeitspunkt seien. Verstehen wir dann unter:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots$$

und

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots b_n x^n + \cdots$$

zwei beständig convergirende Potenzreihen von x, so wird der Ausdruck:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots$$
$$+ b_1 \frac{1}{x} + b_2 \frac{1}{x^2} + \cdots b_n \frac{1}{x^n} + \cdots$$

eine Function der verlangten Art sein, da derselbe als einzige singuläre Punkte den Null- und den Unendlichkeitspunkt enthält und diese als wesentliche singuläre.

Wir kommen auf diese Weise zu unendlichen Reihen, die nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreiten. Ehe wir in dem eigentlichen Thema weitergehen, mögen einige der wichtigsten Sätze über derartige Reihen kurz entwickelt werden.

Sei ganz allgemein eine Reihe vorgelegt:

$$\alpha_0 + \alpha_1 . x + \cdots \alpha_n . x^n + \cdots$$
$$+ \beta_1 \cdot \frac{1}{x} + \cdots \beta_n \frac{1}{x^n} + \cdots,$$

wobei die α und β beliebige Grössen bedeuten. Dann wird der Convergenzbereich derselben aus demjenigen Ebenenstück bestehen, welches den Convergenzbereichen der beiden Reihen:

$$\alpha_0 + \alpha_1 . x + \cdots \alpha_n . x^n + \cdots$$

und

$$\beta_1 \cdot \frac{1}{x} + \cdots \beta_n \cdot \frac{1}{x^n} + \cdots$$

gemeinsam ist. Der Convergenzbereich der ersten Reihe ist ein Kreis, dessen Radius wir mit r_1 bezeichnen wollen, der Convergenzbezirk der zweiten Reihe besteht aus allen Punkten der ganzen unendlichen Ebene, die ausserhalb eines Kreises gelegen sind. Der zweite Kreis ist ebenso wie der erste um den Nullpunkt beschrieben und möge den Radius r_2 besitzen. Der Convergenzbereich der vorgelegten unendlichen Reihe wird also von den Punkten gebildet, die innerhalb des Kreisringes gelegen sind, der von den Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 begrenzt ist. Daneben können auch Punkte auf den begrenzenden Peripherien hinzutreten. Hierbei muss r_1 grösser oder gleich r_2 sein, vorausgesetzt, dass von einem Convergenzbereich die Rede sein soll. Wir wollen auch den Fall ausschliessen, dass $r_1 = r_2$ ist.

Dann folgt zunächst, dass im Innern des angegebenen Kreisringes die Convergenz der Reihe eine unbedingte ist, es folgt ferner, dass sich die durch die Reihe dargestellte Function in der Umgebung aller dieser Punkte regulär verhalten muss. Ferner werden wir die Function

auch ausserhalb des angegebenen Bereiches darstellen können, wobei zu bemerken ist, dass sowohl auf der Peripherie des inneren, als auf der Peripherie des äusseren Kreises mindestens ein singulärer Punkt gelegen sein muss.

Ferner gilt der folgende

Lehrsatz: Seien

$$\alpha_0 + \alpha_1 . x + \alpha_2 . x^2 + \cdots$$
$$+ \beta_1 \frac{1}{x} + \beta_2 \frac{1}{x^2} + \cdots$$

und

$$\alpha_0' + \alpha_1' . x + \alpha_2' . x^2 + \cdots$$
$$+ \beta_1' \cdot \frac{1}{x} + \beta_2' \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots$$

zwei Reihen der angegebenen Art, deren Convergenzbereiche einen gemeinsamen Theil besitzen mögen. Sie mögen ferner für alle Punkte eines endlichen, beliebig kleinen Linienstückes übereinstimmen, welches ganz im Innern des gemeinsamen Convergenzbereiches gelegen ist, dann müssen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x in der ersten Entwickelung gleich den Coefficienten der entsprechenden Potenzen von x in der zweiten Entwickelung sein, d. h.

$$\alpha_n = \alpha_n', \; \beta_n = \beta_n'.$$

Der Beweis kann leicht folgendermassen geführt werden. Zunächst folgt, dass, wenn die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, die beiden Reihen sicher in dem ganzen gemeinsamen Convergenzbezirk übereinstimmen werden. Beschreiben wir also um den Nullpunkt einen Kreis, der ganz im Innern des gemeinsamen Bereiches gelegen ist, so müssen sie für die Peripheriepunkte desselben übereinstimmen oder aber die Reihe:

$$\sum (\alpha_n - \alpha_n') x^n + \sum (\beta_n - \beta_n') \frac{1}{x^n}$$

muss für die genannten Punkte gleich Null sein. Nun haben wir für die gewöhnlichen Potenzreihen den Cauchy'schen Satz entwickelt. Der Beweis ist so gegeben worden, dass er unmittelbar auf unsere allgemeinen Reihen Anwendung findet. Wir wollen ihn unter solchen Umständen auch für diese Reihen als bewiesen annehmen, dann folgt sofort:

$$\alpha_n = \alpha_n', \; \beta_n = \beta_n'.$$

Unter den genannten Reihen sind nun die am Anfange des Paragraphen erwähnten von besonderer Bedeutung. Man nennt die Functionen, welche durch dieselben dargestellt werden, ganze transcendente

Functionen im weiteren Sinne. Wir wollen schon an dieser Stelle den folgenden Lehrsatz für dieselben beweisen.

Lehrsatz: Verschwindet die transcendente ganze Function im weiteren Sinne:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$+ a_{-1}\frac{1}{x} + a_{-2}\frac{1}{x^2} + \cdots \qquad \text{für } x = a$$

so ist $\dfrac{f(x)}{1-\dfrac{x}{a}}$ und $\dfrac{f(x)}{1-\dfrac{a}{x}}$ eine ebensolche Function.

In der That, jedenfalls kann eine Constante c so bestimmt werden, dass:

$$c + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

für $x = a$ verschwindet. Nun ist:

$$f(x) = c + a_0 + a_1 . x + a_2 . x^2 + \cdots$$
$$+ - c + a_{-1}\frac{1}{x} + a_{-2}\frac{1}{x^2} + \ldots$$

also muss auch:

$$-c + a_{-1}\frac{1}{x} + a_{-2}\frac{1}{x^2} + \cdots$$

für $x = a$ verschwinden.

Unter solchen Umständen können wir schreiben:

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)(b_0 + b_1 . x + b_2 . x^2 + \cdots)$$
$$+ \left(1 - \frac{a}{x}\right)\left(b_{-1} + b_{-2}\frac{1}{x} + \cdots\right)$$

oder auch:

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\Big(b_0 + b_1 x + b_2 . x^2 + \cdots$$
$$- ab_{-1}\frac{1}{x} - ab_{-2}\frac{1}{x^2} + \cdots\Big)$$

und:

$$f(x) = \left(1 - \frac{a}{x}\right)\Big(-\frac{b_0 x}{a} - \frac{b_1 x^2}{a} - \frac{b_2 x^3}{a} \cdots$$
$$+ b_{-1} + b_{-2}\frac{1}{x} + b_{-3}\frac{1}{x^2} + \cdots\Big).$$

Damit ist der Beweis geliefert.

§ 8.[2])

Darstellung aller Functionen, die als einzige singuläre Punkte zwei wesentliche besitzen.

Wir haben im vorigen Paragraphen in den ganzen transcendenten Functionen im weiteren Sinne Functionen gefunden, die nur zwei singuläre Punkte besitzen, den Null- und den Unendlichkeitspunkt, und

zwar waren dieselben wesentliche singuläre Punkte. Wir zeigen, dass auch die Umkehrung richtig ist oder aber dass folgender Lehrsatz gilt:

Lehrsatz: Alle analytischen eindeutigen Functionen, die als einzige singuläre Punkte zwei wesentliche besitzen und zwar den Null- und den Unendlichkeitspunkt, sind in den ganzen transcendenten Functionen im weiteren Sinne enthalten.

Dieser Satz ist ein specieller Fall des sogenannten Laurent'schen Satzes, welcher in neuerer Zeit durch Mittag-Leffler und Scheeffer einfache Beweise gefunden hat.

Wir wollen hier die Darstellung geben, wie sie sich in dem citirten Werke von Rausenberger S. 136 flg. findet. Es sei $f(x)$ die allgemeinste Function der angegebenen Art, dann setzen wir:

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)}{2},$$

$$\varphi_3(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\varphi_2(x),$$

dann sind die sämmtlichen drei neuen Functionen von demselben Charakter wie $f(x)$, überdies aber finden die beiden Beziehungen statt:

$$\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_1(x),$$

$$\varphi_3\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_3(x).$$

Wir wollen nun eine neue Veränderliche y vermöge der Gleichung einführen:

$$y = x + \frac{1}{x},$$

dann ergeben sich zu jedem Werthe von y zwei Werthe von x und zwar ist:

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}$$

oder auch:

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{2} \mp \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}.$$

Ferner folgt, dass y für $x = 0$ und für $x = \infty$ unendlich gross wird, im Uebrigen aber endlich bleibt.

Hieraus folgt, dass die Functionen:

$$f(x) = f\left(\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{y}{2} \mp \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right)$$

aufgefasst als Functionen von y für alle endlichen Werthe von y endlich bleiben. Wir behaupten, dass der Ausdruck:

$$2\varphi_1(x) = f\left(\frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right) + f\left(\frac{y}{2} \mp \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}\right),$$

welcher zunächst dieselbe Eigenschaft besitzt, sich für die genannten Werthe nach Potenzen von y in der Form einer gewöhnlichen convergirenden Potenzreihe darstellen lässt und eindeutig ist.

In der That, denken wir uns unter a eine beliebig grosse reelle positive Zahl, so wird die Entwickelung von $f(x)$ im Punkte $x = a$ nach steigenden Potenzen von $x - a$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots$$

in einem Kreise convergiren, der um a beschrieben ist und bis zum Nullpunkt reicht. Dabei kann a so gross gewählt werden, dass dieser Kreis einen jeden Punkt rechts von der imaginären Axe umfasst. Liegt nun

$$x = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

rechts von der imaginären Axe, so thut es:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\varrho}\,[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$$

auch und dabei ist klar, dass wir a so gross wählen können, dass beide Punkte x und $\frac{1}{x}$ in den Convergenzkreis der Reihe fallen. Nehmen wir $-a$ als Mittelpunkt an, so können wir mit den Punkten links von der imaginären Axe analog verfahren. Die Punkte, welche auf der imaginären Axe gelegen sind, bedürfen, wie unmittelbar klar, keiner besonderen Untersuchung. Haben wir nun a so gewählt, dass für bestimmte x:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots$$

und

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{1}{x} - a\right) + a_2\left(\frac{1}{x} - a\right)^2 + \cdots$$

gleichzeitig convergiren, so werden aus:

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)}{2} = a_0 + \frac{a_1}{2}\left[(x - a) + \left(\frac{1}{x} - a\right)\right]$$
$$+ \frac{a_2}{2}\left[(x - a)^2 + \left(\frac{1}{x} - a\right)^2 + \cdots\right]$$

bei Einführung von y die Irrationalitäten herausfallen, so dass hieraus die Richtigkeit der Behauptung für alle endlichen Werthe von y folgt, wie kaum näher ausgeführt zu werden braucht. Hieraus folgt, dass $\varphi_1(x)$ sich als ganze transcendente Function von y darstellen lässt, etwa in der Form:

$$\varphi_1(x) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \cdots$$

Ersetzen wir y durch $x + \frac{1}{x}$ und erwägen wiederum, dass eine jede Reihe, bei welcher die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder convergent ist, beliebig angeordnet werden kann, so folgt die Darstellung von $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x) = B_0 + B_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + B_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \cdots,$$

wobei die Reihe:

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots$$

eine beständig convergirende ist.

Das analoge Resultat ergiebt sich für

$$2\varphi_3(x) = \varphi_3(x) + \varphi_3\left(\frac{1}{x}\right)$$

und hieraus folgern wir für $\varphi_2(x)$ die Form:

$$\varphi_2(x) = \frac{C_0 + C_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + C_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \cdots}{x - \frac{1}{x}},$$

wobei die Reihe im Zähler für alle endlichen von Null verschiedenen Werthe von x endlich sein muss. Dasselbe gilt aber, wie unmittelbar folgt, auch von $\varphi_2(x)$. Unter solchen Umständen muss der Zähler durch den Nenner theilbar sein und zwar ergiebt sich das Resultat in derselben Form wie der Zähler, wie im vorigen Paragraphen bewiesen. Mithin finden wir, dass $f(x)$ sich in der That durch die Reihe darstellen lässt:

$$f(x) = D_0 + D_1 . x + D_2 x^2 + \cdots$$
$$+ D_{-1}\frac{1}{x} + D_{-2}\frac{1}{x^2} + \cdots,$$

die für alle endlichen von Null verschiedenen Werthe von x convergent ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir haben bei diesen Betrachtungen als wesentliche singuläre Punkte den Null- und den Unendlichkeitspunkt gewählt. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass ganz allgemein der folgende Lehrsatz gilt:

Lehrsatz: Die sämmtlichen eindeutigen Functionen, die die beiden Punkte a und b als alleinige singuläre und zwar als wesentliche singuläre besitzen, haben die Form:

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right)+G_1\left(\frac{1}{x-b}\right),$$

wobei $G(x)$ und $G_1(x)$ die allgemeinsten ganzen transcendenten Functionen von x in ihrer ursprünglichen Definition bedeuten.

§ 9.

Untersuchung des Quotienten zweier Potenzreihen. Ueber die Nullpunkte der ganzen transcendenten Functionen.

Um weitere analytische Functionen zu schaffen, wollen wir jetzt den reciproken Werth einer Potenzreihe ins Auge fassen und zwar wollen wir hierbei der Einfachheit halber annehmen, dass diese Potenzreihe $f(x)$ beständig convergent sei. Der Quotient möge die Form haben:

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots},$$

Dann gilt der

Lehrsatz: Ist a_0 von Null verschieden, so lässt sich der Quotient $\frac{1}{f(x)}$ in eine Potenzreihe von x verwandeln, welche bis zu demjenigen Nullpunkt von $f(x)$ reicht, welcher dem Punkte $x=0$ am nächsten liegt.

In der That, wie früher bewiesen, können wir für x eine positive Grenze ξ derart bestimmen, dass für alle Werthe von x, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als ξ, der Ausdruck:

$$|\,a_1.x+a_2.x^2+\cdots a_n.x^n+\cdots|$$

kleiner ist als eine beliebig klein vorgelegte Grösse, also auch kleiner als $|a_0|$. Dabei bleibt dieses Resultat bestehen, wenn wir an Stelle der Grössen a_n und x ihre absoluten Beträge setzen. Wir wollen den ganzen Ausdruck durch $-\eta$ bezeichnen, dann folgt für die definirten Werthe von x:

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{a_0-\eta}=\frac{1}{a_0}\left(1+\frac{\eta}{a_0}+\frac{\eta^2}{a_0^2}+\cdots\right).$$

Die einzelnen Ausdrücke $\frac{\eta^n}{a_0^n}$ können ihrerseits als Potenzreihen von x dargestellt werden. Der ganze Ausdruck convergirt aber auch dann, wenn wir die einzelnen Glieder durch ihre absoluten Beträge ersetzen. Hieraus folgt, dass die Anordnung der Glieder willkürlich ist,

so dass wir die rechte Seite jedenfalls in eine Potenzreihe von x verwandeln können, welcher ein bestimmter Convergenzbereich zukommt.

Wir behaupten, dass derselbe bis zum nächsten Nullpunkt von $f(x)$ reicht.

In der That, wir wollen die Potenzreihe, welche den Quotienten um den Nullpunkt herum darstellt, schreiben:

$$b_0 + b_1 . x + b_2 . x^2 + \cdots b_n . x^n + \cdots$$

Dieselbe stimmt dann jedenfalls in allen Punkten, die im Innern des Convergenzbereiches gelegen sind, mit $\frac{1}{f(x)}$ überein. Keinenfalls darf daher der Convergenzbereich über einen Nullpunkt von $f(x)$ hinausreichen. Er muss aber bis zum nächsten Nullpunkt von $f(x)$ reichen. In der That, wäre dasselbe nicht der Fall, so greifen wir auf der Peripherie des Convergenzbereiches einen beliebigen Punkt a heraus. Da derselbe kein Nullpunkt von $f(x)$ ist, so können wir um ihn herum $f(x)$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots,$$

wobei c_0 von Null verschieden ist. Unter solchen Umständen können wir:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots}$$

nach Potenzen von $(x-a)$ entwickeln d. h. in die Form bringen:

$$d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + \cdots$$

Diese Reihe muss dann aber mit der Reihe:

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

im gemeinsamen Convergenzbereich übereinstimmen d. h. a und damit kein Punkt auf der Peripherie des Convergenzkreises könnte ein singulärer sein, sodass ein Widerspruch entsteht. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir haben der Einfachheit halber angenommen, dass $f(x)$ eine ganze transcendente Function ist und ebenso dass der Zähler gleich 1 sei. Wir können die Resultate ohne Weiteres verallgemeinern, indem wir den folgenden Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz: Der Quotient zweier Potenzreihen von x ist um den Nullpunkt herum wiederum durch eine Potenzreihe darstellbar, wenn das constante Glied im Nenner von Null verschieden ist. Der Convergenzbereich derselben reicht mindestens bis zum nächsten singulären Punkte des Zählers oder Nenners oder bis zum nächsten Nullpunkte des Nenners.

Eine Ergänzung dieses Satzes ist dann der folgende:

Eine jede eindeutige Function $f(x)$ hat dieselben wesentlichen singulären Stellen wie $\frac{1}{f(x)}$.

In der That sei x_1 eine wesentliche singuläre Stelle von $f(x)$, dagegen nicht von $\frac{1}{f(x)}$. Dann können zwei Fälle eintreten. Entweder $\frac{1}{f(x)}$ verhält sich in der Umgebung von x_1 regulär oder aber x_1 ist eine ausserwesentliche singuläre Stelle. Beide Fälle führen, wie aus der Definition unmittelbar klar ist, zu einem Widerspruch.

Hieran schliesst sich der folgende

Lehrsatz: Eine jede eindeutige Function von x hat in einem endlichen Theile des Gebietes von x, der weder im Innern, noch an der Grenze eine wesentliche singuläre Stelle besitzt, nur eine endliche Anzahl von Stellen, an denen sie unendlich gross oder Null wird.

Der erste Theil ergiebt sich aus den folgenden Bemerkungen. Wenn die Zahl der Unendlichkeitsstellen eine unendlich grosse wäre, so müsste es im Innern oder an der Grenze des Bereiches wenigstens eine Stelle geben, welche sich dadurch auszeichnet, dass in jeder Umgebung derselben von ihr verschiedene Unendlichkeitsstellen vorhanden sein müssten. Es folgt das aus Betrachtungen, die ähnlich denjenigen sind, die wir anstellten, um die Existenz eines singulären Punktes auf der Peripherie des Convergenzkreises nachzuweisen. Dann müsste dieser Punkt ein wesentlicher singulärer sein und das ist gegen die Annahme. Der zweite Theil folgt aus dem vorhin bewiesenen Satze, dass $f(x)$ und $\frac{1}{f(x)}$ dieselben wesentlichen singulären Stellen besitzen.

Ist also $f(x)$ eine ganze transcendente Function, so giebt es unter den Werthen von x, deren absoluter Betrag eine willkürlich angenommene Grenze nicht übersteigt, stets nur eine endliche Anzahl solcher, für die $f(x)$ gleich Null wird. Dies gilt auch dann noch, wenn wir ähnlich, wie es in der Algebra geschieht, festsetzen, dass bei Bestimmung der in Rede stehenden Zahl jeder Werth, für welchen ausser der Function $f(x)$ selbst auch die $(\mu - 1)$ ersten Ableitungen derselben verschwinden, die μ^{te} aber nicht, als ein μ mal zu zählender betrachtet werden soll.

Hieraus folgt dann der wichtige Weierstrass'sche

Lehrsatz: Die Nullstellen einer jeden ganzen transcendenten Function können in eine Reihe gebracht werden:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

derart, dass:

1. in derselben jeder Werth so oft, als er nach der gemachten Feststellung zu zählen ist, vorkommt;
2. für je zwei auf einander folgende Glieder der Reihe die Ungleichheit besteht:
$$|\alpha_{n+1}| \geq |\alpha_n|;$$
3. im Falle die Reihe nicht abbricht, die Relation stattfindet:
$$\lim_{n=\infty} |\alpha_n| = \infty.$$

§ 10.

Productentwickelung der ganzen transcendenten Functionen. Darstellung aller eindeutigen Functionen, welche einen wesentlichen singulären und beliebig viele ausserwesentliche singuläre Punkte besitzen.

Ist $x = \alpha_1$ ein Nullpunkt der ganzen transcendenten Function $f(x)$, so sahen wir, können wir dieselbe schreiben:

$$f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x),$$

wobei $f_1(x)$ wiederum eine ganze transcendente Function ist. Sind daher $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ eine endliche Anzahl von Nullstellen von $f(x)$, so können wir analog schreiben:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) f_n(x),$$

wo auch $f_n(x)$ eine ganze transcendente Function bedeutet. Es kann der letzte Satz nicht unmittelbar verallgemeinert werden, wenn die Zahl der Nullstellen unendlich gross wird. Es ist das Verdienst von Weierstrass, die hier befindliche Lücke ausgefüllt zu haben, und zwar geschieht dasselbe auf Grund des folgenden Satzes:

Lehrsatz: Ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ eine Reihe von Grössen der im vorigen Paragraphen definirten Art, so lässt sich stets ein unendliches Product bilden:

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \varphi_1(x) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \varphi_2(x) \ldots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) \varphi_n(x) \ldots,$$

welches für alle endlichen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ verschiedenen Werthe von x convergirt, in welchem ferner $\varphi_r(x)$ gewisse im Endlichen niemals verschwindende ganze transcendente Functionen bedeuten.

Der Beweis dieses Satzes ist sofort klar, wenn die Reihe der absoluten Beträge der Grössen $\frac{1}{\alpha_n}$ convergent ist. In diesem Falle haben

wir nur nöthig, die einzelnen Grössen $\varphi_n(x) = 1$ zu setzen. Dieser Fall ist der einzige, der für uns in der Folge von Interesse sein wird, indessen möge auch der entgegengesetzte kurz betrachtet werden. Wir wollen da zwei Unterfälle unterscheiden:

I. Es giebt eine bestimmte ganze Zahl m von der Beschaffenheit, dass die Reihe:
$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^m + \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^m + \cdots$$
absolut convergent ist.

II. Die Reihe:
$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^m + \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^m + \cdots$$
ist für jedes noch so grosse m divergent.

Im ersten Falle setzen wir:
$$\varepsilon_n(x) = \frac{x}{\alpha_n} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha_n^2} + \cdots \frac{1}{m-1}\frac{x^{m-1}}{\alpha_n^{m-1}},$$
$$\varphi_n(x) = e^{\varepsilon_n(x)},$$
dann ist das Product:
$$\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\varphi_1(x)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\varphi_2(x)\ldots\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)\varphi_n(x)\ldots$$
ein unbedingt convergentes für alle endlichen Werthe von x mit Ausnahme der Werthe
$$x = \alpha_r, \quad r = 1, 2, \ldots n, \ldots$$
für welche es verschwindet. In der That, entwickelt man den n^{ten} Factor nach Potenzen von x, so findet man:
$$\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)\varphi_n(x) = 1 - \frac{1}{m}\frac{x^m}{\alpha_n^m}(1 + \theta),$$
worin θ eine endliche mit wachsendem n dem absoluten Betrage nach abnehmende Zahl bedeutet. Ein unendliches Product aus Factoren dieser Art ist aber bekanntlich unbedingt convergent.

Im zweiten Falle setzen wir:
$$\varepsilon_n(x) = \frac{x}{\alpha_n} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha_n^2} + \cdots \frac{1}{n-1}\frac{x^{n-1}}{\alpha_n^{n-1}},$$
$$\varphi_n(x) = e^{\varepsilon_n(x)},$$
so ist das unendliche Product:
$$\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\varphi_1(x)\ldots\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)\varphi_n(x)\ldots$$
ein absolut convergentes mit Ausnahme an den Stellen
$$x = \alpha_r,$$
an welchen es verschwindet.

In der That, es ist:

$$\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)\varphi_n(x)=\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)e^{-\log\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)-\frac{1}{n}\frac{x^n}{\alpha_n^{\,n}}-\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{\alpha_n^{\,n+1}}\cdots}$$
$$=\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)^{-1}e^{-\frac{1}{n}\frac{x^n}{\alpha_n^{\,n}}-\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{\alpha_n^{\,n+1}}\cdots}$$
$$=1-\frac{1}{n}\frac{x^n}{\alpha_n^{\,n}}(1+\delta_n),$$

worin δ_n mit wachsendem n gegen Null convergirt. Hieraus folgt dann das zu Beweisende unmittelbar.

Aus dem soeben bewiesenen fundamentalen Lehrsatz folgt mit leichter Mühe der folgende

Lehrsatz: Die sämmtlichen im vorigen Lehrsatz definirten unendlichen Producte sind transcendente ganze Functionen d. h. sie geben ausmultiplicirt Potenzreihen, die für jedes endliche x convergiren.

Im ersten Falle, in welchem die Reihe der Grössen $\left|\frac{1}{\alpha_n}\right|$ convergirt, folgt der Beweis aus den Elementen der Analysis, im zweiten Falle beruht er wesentlich darauf, dass das vorgelegte unendliche Product, dessen einzelne Factoren als Potenzreihen von x dargestellt werden können, convergent bleibt, wenn wir in diesen Potenzreihen sämmtliche Glieder durch die ihnen entsprechenden absoluten Beträge ersetzen.

Wir sind somit im Stande zu vorgelegten Nullstellen, wenn sie nur die oben angegebenen Eigenschaften besitzen, dazu gehörende ganze transcendente Functionen zu bestimmen. Es ist klar, dass die Anzahl derselben eine unendlich grosse ist. In der That, ist $G(x)$ eine Function der genannten Art, so sind es die Functionen:

$$G(x)\,.\,e^{G_1(x)},$$

auch, wenn unter $G_1(x)$ die allgemeinste ganze transcendente Function von x verstanden ist. Alle diese Functionen haben ja dieselben Nullpunkte und lassen sich sämmtlich als ganze transcendente Functionen von x darstellen. Wir behaupten aber, dass hiermit umgekehrt auch alle Functionen der verlangten Art erschöpft sind.

In der That seien $G_2(x)$ und $G(x)$ zwei transcendente ganze Functionen, welche dieselben Nullpunkte besitzen. Der Quotient:

$$\frac{G_2(x)}{G(x)},$$

der mit $G_3(x)$ bezeichnet werde, ist dann eine Function von x, die für jeden endlichen Werth einen von Null verschiedenen endlichen Werth hat.

Es lässt sich deshalb

$$\frac{1}{G_3(x)}\frac{dG_3(x)}{dx}$$

in eine beständig convergirende Potenzreihe:

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots$$

entwickeln. Setzt man daher:

$$G_1(x) = c_0 + c_1 x + \frac{c_2}{2} x^2 + \cdots$$

und nimmt die Constante c_0 so an, dass

$$G_3(0) = e^{c_0}$$

ist, so wird:

$$\frac{1}{G_3(x)}\frac{dG_3(x)}{dx} = \frac{dG_1(x)}{dx}$$

oder:

$$G_3(x) = e^{G_1(x)},$$

oder es giebt der Ausdruck:

$$G(x)e^{G_1(x)}$$

alle ganzen transcendenten Functionen von x an, welche dieselben Nullstellen wie $G(x)$ besitzen.

Nun sei das Problem gestellt, alle diejenigen eindeutigen Functionen aufzustellen, die ausser einem wesentlichen singulären — und zwar nehmen wir der Einfachheit halber den Unendlichkeitspunkt an — noch beliebig viele ausserwesentliche singuläre besitzen. Wir wollen die allgemeinste gesuchte Function der genannten Art durch $f(x)$ bezeichnen. Dann ist es nach dem soeben bewiesenen Satze möglich, ganze transcendente Functionen aufzustellen, welche dieselben Nullstellen wie $\frac{1}{f(x)}$ besitzen. Sei eine solche $G(x)$, dann folgt, dass das Product $f(x)G(x)$ eine ganze transcendente Function sein muss. Bezeichnen wir dieselbe durch $G_1(x)$, so folgt:

$$f(x) = \frac{G_1(x)}{G(x)}$$

d. h. die gesuchte Function lässt sich als Quotient zweier ganzen transcendenten Functionen darstellen. Wir wollen Functionen dieser Art mit dem Namen der transcendenten gebrochenen Functionen bezeichnen. Mithin erhalten wir den

Lehrsatz: Die sämmtlichen eindeutigen Functionen, die den Unendlichkeitspunkt als einzigen wesentlichen singulären Punkt besitzen, daneben aber noch beliebig viele ausserwesentliche singuläre Punkte haben, lassen sich in der Form von transcendenten gebrochenen Functionen darstellen.

Es braucht nicht näher ausgeführt zu werden, wie sich die Resultate modificiren, wenn an Stelle des Unendlichkeitspunktes ein anderer wesentlicher singulärer Punkt zu Grunde gelegt wird.

§ 11.

Productentwickelung der ganzen transcendenten Functionen im weiteren Sinne. Darstellung aller eindeutigen Functionen, welche zwei wesentliche singuläre und beliebig viele ausserwesentliche singuläre Punkte besitzen.

Wir wollen nun die Betrachtungen, die wir im vorigen Paragraphen für die gewöhnlichen ganzen transcendenten Functionen angestellt haben, für die ganzen transcendenten Functionen im weiteren Sinne verallgemeinern. Da die Betrachtungen sehr analog denen des vorigen Paragraphen sind, so wollen wir uns aber hier im Wesentlichen auf Angabe der Resultate beschränken.

Wird eine ganze transcendente Function $f(x)$ für einen Werth $x = a$ der Null gleich, so fanden wir, sind die beiden Functionen:

$$\frac{f(x)}{1-\frac{x}{a}} \quad \text{und} \quad \frac{f(x)}{1-\frac{a}{x}}$$

Functionen derselben Art oder aber wir können in diesem Falle entweder den Factor $1-\frac{x}{a}$ oder $1-\frac{a}{x}$ absondern. Das Resultat bleibt offenbar richtig, wenn eine endliche Anzahl von Nullstellen vorgelegt sind, dagegen wird das Verfahren hinfällig, wenn die Zahl der Nullpunkte unendlich gross wird.

In diesem Falle treten die folgenden Betrachtungen ein.

Wir können zunächst auch hier von einem μ-mal zu zählenden Werthe sprechen, für welchen die vorgelegte Function verschwindet. Ferner können dann die Werthe von x, für welche eine ganze Function im weiteren Sinne verschwindet, in einer doppelten Reihe angeordnet werden:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$$
$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \ldots$$

so zwar dass:

1. in derselben jeder Werth so oft, als er zu zählen ist, vorkommt,
2. für je zwei auf einander folgende Glieder der oberen Reihe:

$$|\alpha_{n+1}| \geqq |\alpha_n|,$$

für je zwei auf einander folgende Glieder der zweiten Reihe:

$$|\beta_{n+1}| \leqq |\beta_n|$$

ist,

3. im Falle die erste Reihe nicht abbricht:

$$\lim_{n=\infty} |\alpha_n| = \infty,$$

im Falle die zweite Reihe nicht abbricht:

$$\lim_{n=\infty} |\beta_n| = 0$$

ist.

Sei nun eine solche Reihe von Punkten α_n und β_n vorgelegt, dann können wir ein unendliches Product bilden:

$$\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\varphi_1(x)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\varphi_2(x)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)\varphi_n(x)\ldots$$
$$\left(1-\frac{\beta_1}{x}\right)\varphi_{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\left(1-\frac{\beta_n}{x}\right)\varphi_{-n}\left(\frac{1}{x}\right)\cdots,$$

welches für alle endlichen Werthe von x, die von Null und den Grössen α_n und β_n verschieden sind, unbedingt convergirt und sich als ganze transcendente Function im weiteren Sinne darstellen lässt. In demselben sind die Grössen φ ganze transcendente Functionen im weiteren Sinne, die in keinem von 0 oder ∞ verschiedenen Punkte verschwinden. Alle anderen Functionen derselben Art, welche dieselben Nullpunkte besitzen, unterscheiden sich von der soeben definirten nur um Factoren, die in keinem von 0 oder ∞ verschiedenen Punkte verschwinden.

Wir wollen nun den Quotienten zweier ganzer transcendenter Functionen im weiteren Sinne mit dem Namen der transcendenten gebrochenen Functionen im weiteren Sinne bezeichnen, dann erhalten wir den

Lehrsatz: Alle eindeutigen Functionen, welche den Null- und den Unendlichkeitspunkt als einzige wesentliche singuläre Punkte besitzen, daneben aber noch beliebig viele ausserwesentliche singuläre, lassen sich als transcendente gebrochene Functionen im weiteren Sinne darstellen.

Wenn an Stelle des Null- und des Unendlichkeitspunktes zwei andere wesentliche singuläre Punkte treten, so ändern sich die Resultate so unwesentlich, dass wir von ihrer Aufstellung füglich absehen können.

Zweiter Abschnitt.

Die Theorie der doppeltperiodischen Functionen auf Grund der Theorie der gewöhnlichen Thetafunctionen.

---

§ 12.[5])

Definition der allgemeinen periodischen Function. Linear periodische Functionen. Zurückführung derselben auf additiv und multiplicatorisch periodische Functionen.

In dem Vorangegangenen sind Gesichtspunkte aufgestellt worden, nach denen die allgemeinen eindeutigen Functionen eingetheilt werden können und zu gleicher Zeit ist die Möglichkeit der wirklichen Darstellung der einzelnen Functionen gegeben. Diese Gesichtspunkte sind aber zu grosse, um auf die Dauer befriedigen zu können. Die Zahl der Functionen mit einem wesentlichen Unstetigkeitspunkte z. B. ist zu mächtig, die Functionen selbst zu sehr von einander verschieden, als dass nicht noch andere Gesichtspunkte in die Untersuchung hineingetragen werden müssten.

Zu dem Behuf führen wir einen neuen Begriff ein. Es sei $\vartheta_1(x)$ eine beliebige Function von x, dann wollen wir eine jede Function von x eine periodische nennen, wenn sie der Functionalgleichung Genüge leistet:

$$1)\qquad f[\vartheta_1(x)] = f(x).$$

Bezeichnen wir dann, wie es in der Algebra üblich ist, die durch Wiederholung des angegebenen Processes aus $\vartheta_1(x)$ entstehenden Grössen durch $\vartheta_2(x), \vartheta_3(x)\ldots\vartheta_n(x)\ldots$, ferner die inversen Functionen durch:

$$\vartheta_{-1}(x),\quad \vartheta_{-2}(x),\ldots\ \vartheta_{-n}(x),\ldots$$

so ist:

$$2)\qquad f[\vartheta_n(x)] = f[\vartheta_{-n}(x)] = f(x).$$

Die Gleichung:

$$3)\qquad y = \vartheta_1(x)$$

nennen wir die zu $f(x)$ gehörende Periodicitätsgleichung.

Unter allen möglichen Fällen wird der einfachste Fall, der sich naturgemäss zuerst darbietet, der sein, dass $\vartheta_1(x)$ sowohl als auch $\vartheta_{-1}(x)$ eine eindeutige Function von x ist, und zwar wollen wir setzen:

$$4)\qquad y = \vartheta_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Wir nennen Functionen mit derartigen Periodicitätsgleichungen linear periodische Functionen und werden uns in der Folge auf die Betrachtung derselben beschränken.

Man kann nun die Theorie der linear periodischen Functionen auf die Theorie gewisser anderer einfacher Functionen zurückführen.

Dazu stellen wir die folgenden Betrachtungen an.

Setzen wir: $$F(x) = f[\varphi_1(x)],$$
wobei $f(x)$ die Periodicitätsgleichung
$$y = \vartheta_1(x)$$
besitzen soll, so haben wir — unter Fortlassung der Klammern —
$$F\varphi_{-1}(x) = f(x),$$
$$F\varphi_{-1}\vartheta_1(x) = f[\vartheta_1(x)] = f(x) = F\varphi_{-1}(x),$$
$$F\varphi_{-1}\vartheta_1\varphi_1(x) = F(x).$$

Die letzte Gleichung ergiebt aber den

Lehrsatz: Besitzt eine Function $f(x)$ die Periodicitätsgleichung $y = \vartheta_1(x)$, so besitzt die Function $F(x)$, die aus ihr entstanden ist, indem an Stelle von x die Function $\varphi_1(x)$ gesetzt wird, die Periodicitätsgleichung:
$$y = \varphi_{-1}\vartheta_1\varphi_1(x).$$

Hierbei wollen wir der Einfachheit wegen unter $\varphi_1(x)$ wiederum eine lineare Function von x verstehen und zwar sei:
$$\varphi_1(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Dann hat nach dem soeben bewiesenen Satze die Function:
$$F(x) = f[\varphi_1(x)] \tag{5}$$
die Periodicitätsgleichung:
$$y = \frac{Ax + B}{Cx + D}, \tag{6}$$
wenn gesetzt ist:
$$\begin{aligned}A &= a\alpha\delta + b\gamma\delta - c\alpha\beta - d\beta\gamma,\\ B &= a\beta\delta + b\delta^2 - c\beta^2 - d\beta\delta,\\ C &= -a\alpha\gamma - b\gamma^2 + c\alpha^2 + d\alpha\gamma,\\ D &= -a\beta\gamma - b\gamma\delta + c\alpha\beta + d\alpha\delta.\end{aligned}$$

Die Grössen α, β, γ, δ sind bisher keiner Beschränkung unterworfen worden. Wir wollen sie so bestimmen, dass
$$C = 0$$
wird.

Dazu muss die Gleichung bestehen:

$$c\alpha^2 + (d - a)\alpha\gamma - b\gamma^2 = 0.$$

α und γ können nicht zu gleicher Zeit der Null gleich werden, weil sonst $\varphi_1(x)$ eine Constante würde, ebensowenig brauchen wir die Annahme zu berücksichtigen, dass γ allein gleich Null sei, denn sonst müsste $c\alpha^2 = 0$ sein oder also $c = 0$, d. h. die ursprüngliche Periodicitätsgleichung hätte schon die gewünschte Form. Unter solchen Umständen sind wir berechtigt durch γ^2 zu dividiren und erhalten die quadratische Gleichung mit der Unbekannten $\frac{\alpha}{\gamma}$:

$$c\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + (d - a)\frac{\alpha}{\gamma} - b = 0.$$

Jedenfalls also sind wir stets im Stande, die Grössen α, β, γ, δ in der genannten Weise zu bestimmen, und hieraus folgt dann ohne Weiteres, dass wir uns, ohne der Allgemeinheit des Problems Abbruch zu thun, auf diejenigen Functionen beschränken können, deren Periodicitätsgleichung lautet:

$$y = \vartheta_1(x) = px + n.$$

Aber auch jetzt noch kann eine Reduction vorgenommen werden. In der That betrachten wir wieder wie vorhin an Stelle der gesuchten Function $f(x)$ die Function:

$$F(x) = f[\varphi_1(x)],$$

wobei $\varphi_1(x) = \alpha x + \beta$ gesetzt ist, so gehört zu ihr die Periodicitätsgleichung:

$$y = \frac{p\alpha x + p\beta - \beta + n}{\alpha}.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle.

Ist die Grösse p verschieden von 1, so können und wollen wir β so bestimmen, dass

$$p\beta - \beta + n = 0$$

wird. Dann nimmt die Periodicitätsgleichung die Form an:

$$y = px.$$

Im ausgeschlossenen Falle können wir α so bestimmen, dass die Periodicitätsgleichung etwa die Form hat:

$$y = x + 1.$$

Somit finden wir zwei Normalformen:

I. $\quad y = px, \quad p$ verschieden von 1,

II. $\quad y = x + 1.$

Die zu der ersten Gleichung gehörenden Functionen nennen wir multiplicatorisch periodische Functionen, die zu der zweiten

Gleichung gehörenden additiv periodische. Zu gleicher Zeit erhalten wir den

Lehrsatz: Die Theorie der allgemeinen linear periodischen Functionen kann auf die Theorie der multiplicatorisch und additiv periodischen Functionen zurückgeführt werden. Sind die letzteren beide sämmtlich bestimmt, so findet man die allgemeinen, indem man an Stelle von x die Grösse:

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

substituirt, in welcher α, β, γ, δ ganz beliebige Werthe annehmen können.

Wir wollen nun bei den multiplicatorisch periodischen Functionen den Fall näher ins Auge fassen, dass

$$|p| = 1$$

ist. Dann sind zwei Möglichkeiten vorhanden. Entweder p ist eine n^{te} Einheitswurzel, oder zweitens, dasselbe ist nicht der Fall.

Der erste Fall ist leicht zu erledigen. In der That sei p eine n^{te} Einheitswurzel und zwar eine primitive, so folgt, dass alle eindeutigen Functionen mit der Periodicitätsgleichung:

$$y = px$$

die Form haben:

$$f(x) = F(x^n),$$

wenn unter $F(z)$ die allgemeinste eindeutige Function von z verstanden wird. Substituirt man nämlich in $f(x)$ $z = x^n$, setzt also $x = \sqrt[n]{z}$, so ist vermöge der Periodicitätsgleichung:

$$f(\sqrt[n]{z}) = F(z)$$

eine eindeutige Function von z, da durch die verschiedenen Wurzelwerthe von $\sqrt[n]{z}$, die sich nur um Potenzen von p von einander unterscheiden, $f(\sqrt[n]{z})$ ungeändert bleibt. Ersetzen wir aber z durch x^n, so ergiebt sich das angegebene Resultat.

Unter solchen Umständen können wir davon absehen, dass p eine n^{te} Einheitswurzel ist.

Nehmen wir nun zweitens an, dass p keine n^{te} Einheitswurzel ist, dagegen den absoluten Betrag 1 besitzt, so können wir setzen:

$$p = \cos 2r\pi + i \sin 2r\pi,$$

wobei r eine irrationale Grösse bedeutet. Bilden wir die einzelnen positiven und negativen Potenzen von p, so erhalten wir eine unendliche Anzahl von Punkten, die alle auf der Peripherie des Einheitskreises gelegen sind, für welche die vorgelegte Function denselben Werth annehmen muss. Dabei können wir es dahin bringen, dass innerhalb

eines beliebig kleinen Peripheriestückes immer noch beliebig viele solche Punkte gelegen sein müssen. Derartige Functionen sind aber, wie aus den früheren Betrachtungen folgt, constante Grössen. Unter solchen Umständen können wir auch von diesem Falle absehen und uns darauf beschränken, dass der absolute Betrag von p kleiner als 1 ist.

§ 13.

Die einfachsten Eigenschaften der additiv periodischen Functionen.

Es mögen nun die einfachsten Eigenschaften der additiv periodischen Functionen bestimmt werden.

Lehrsatz: Jede additiv periodische Function besitzt den Unendlichkeitspunkt als wesentlichen singulären.

In der That, nimmt eine eindeutige additiv periodische Function irgend einen Werth in einem endlichen Punkte x an, so muss sie denselben Werth auch im Unendlichkeitspunkte annehmen, wie aus dem Begriff der additiven Periodicität unmittelbar folgt. Daraus folgt, dass der Werth der Function im Unendlichkeitspunkte unbestimmt ist, dass sie in demselben unendlich viele Werthe annehmen kann. Hieraus folgt aber wiederum, dass der Unendlichkeitspunkt kein regulärer sein kann, da in einem solchen die Function nur einen Werth annehmen kann. Ebensowenig kann er ein ausserwesentlicher singulärer sein, denn aus der Definition des letzteren folgt, dass der Werth der Function immer mehr wächst, je mehr man sich demselben nähert. Hieraus schliessen wir die Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Ferner folgt der

Lehrsatz: Besitzt eine additiv periodische Function ausser dem Unendlichkeitspunkt noch einen anderen singulären Punkt, so besitzt sie deren unendlich viele.

Der Beweis ist klar. Ist nämlich $x = a$ ein singulärer Punkt, so findet dasselbe für alle Punkte $a + rn$ statt, wobei r alle ganzzahligen Werthe durchlaufen kann.

Es ist nun nicht schwer, alle eindeutigen Functionen zu finden, die der Gleichung:

$$f(x+n) = f(x)$$

Genüge leisten. In der That, setzt man:

$$x = \frac{n}{2\pi i} \log y,$$

so ist:

$$f(x) = f\left(\frac{n}{2\pi i} \log y\right) = F(y)$$

eine eindeutige Function von y, wie aus der Eigenschaft des Logarithmus unmittelbar folgt, dass eine Umkreisung des Nullpunktes eine Aenderung um $2\pi i$ herbeiführt.

Aus

$$x = \frac{n}{2\pi i} \log y$$

folgt umgekehrt:

$$y = e^{\frac{2\pi i}{n} x}.$$

Hieraus ergiebt sich der

Lehrsatz: Die allgemeinste additiv periodische eindeutige Function von x wird erhalten, indem man in der allgemeinsten eindeutigen Function an Stelle des Argumentes die Grösse $e^{\frac{2\pi i}{n} x}$ setzt.

§ 14.

Darstellung und einfachste Eigenschaften der multiplicatorisch periodischen Functionen.

Es sollen nun für die multiplicatorisch periodischen Functionen ähnliche Sätze wie für die additiv periodischen aufgestellt werden. Zunächst folgt der

Lehrsatz: Eine jede multiplicatorisch periodische Function hat den Null- und den Unendlichkeitspunkt als wesentliche singuläre Punkte.

In der That, ist $x = a$ ein beliebiger Punkt, in welchem die Function den Werth A annimmt, so nimmt sie denselben Werth auch in den Punkten $ap, ap^2, \ldots ap^n, \ldots \frac{a}{p}, \frac{a}{p^2}, \cdots \frac{a}{p^n} \cdots$ an, wenn:

$$y = px$$

die Periodicitätsgleichung derselben ist. Wir erhalten zwei Reihen von Grössen. Die eine besitzt die Null als Grenze, während die Glieder der anderen über alle Grenzen wachsen. Dann können wir aber genau so wie im vorigen Paragraphen schliessen. Hierbei ist der absolute Betrag von p von 1 verschieden angenommen, wie es auch in der Folge geschehen soll, und ferner ist, wie schon bemerkt, der absolute Betrag von p ein für alle Mal kleiner als 1 anzunehmen.

Lehrsatz: Besitzt eine multiplicatorisch periodische Function ausser dem Null- und Unendlichkeitspunkt noch einen anderen singulären Punkt, so besitzt sie deren unendlich viele.

Auf den Beweis dieses Satzes braucht nicht näher eingegangen zu werden.

Es fragt sich nun, wie sehen alle multiplicatorisch periodischen Functionen aus?

Da dieselben den Null- und den Unendlichkeitspunkt als wesentliche singuläre Punkte besitzen, so fragen wir zunächst, giebt es unter den verallgemeinerten ganzen transcendenten Functionen solche der gesuchten Art oder nicht? Die Frage ist damit identisch: Können in dem Ausdruck:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots$$
$$+ \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \frac{a_{-3}}{x^3} + \cdots$$

die Coefficienten a_n und a_{-n} so bestimmt werden, dass die Reihen:

$$a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n + \cdots$$
$$a_{-1} z + a_{-2} z^2 + \cdots a_{-n} z^n + \cdots$$

beständig convergent sind und überdies der Relation Genüge leisten:

$$f(px) = f(x)?$$

Mit Hülfe der früher entwickelten Sätze folgt dann als hinreichende und nothwendige Bedingung die Existenz der Gleichungen:

$$a_0 = a_0,$$
$$a_k = p^k . a_k,$$

d. h. es müssen die sämmtlichen Coefficienten ausser a_0 verschwinden.

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Die multiplicatorisch periodischen Functionen müssen ausser dem Null- und dem Unendlichkeitspunkte noch andere singuläre Punkte besitzen.

Diese singulären Punkte können wesentliche und ausserwesentliche singuläre sein. Den ersten Fall schliessen wir ein für alle Mal von der Betrachtung aus, denn es müssten Functionen der genannten Art unendlich viele wesentliche Singularitäten besitzen und in Folge dessen so complicirter Natur sein, dass ihre Bedeutung hinter der der anderen zurücktritt.

Unter solchen Umständen haben wir alle unsere Functionen unter den transcendenten gebrochenen Functionen im weiteren Sinne zu suchen. Zu gleicher Zeit folgt, dass dieselben auch noch in anderen Punkten als dem Null- und dem Unendlichkeitspunkte Null werden müssen. Es folgt das daraus, dass die wesentlichen singulären Punkte einer Function $f(x)$ zu gleicher Zeit auch wesentliche singuläre Punkte der Function $\frac{1}{f(x)}$ sind.

Wir werden nun die Nullpunkte sowohl wie auch die Unendlichkeitspunkte in Gruppen zerlegen können, indem wir einer Gruppe alle diejenigen Punkte zuordnen, die mit einander durch Periodicität verbunden

sind. Es seien $a_1, a_2, \dots a_m$ die Nullpunkte, $b_1, b_2, \dots b_n$ die Unendlichkeitspunkte, die mit einander nicht durch Periodicität verbunden sind, dann ist es möglich, dass m sowohl als auch n unendlich gross wird. Wir wollen diesen Fall auch ein für alle Mal von der Betrachtung ausschliessen, also annehmen, dass die Zahl der Nullpunkte sowohl, als auch die Zahl der Unendlichkeitspunkte, welche durch Periodicität nicht verbunden sind, eine endliche ist. Dabei rechnen wir einen k-fachen Punkt gleich k einfachen.

Setzen wir nun:

$$1) \qquad \varepsilon(p,x) = (1+x)(1+px)\dots(1+p^n x)\dots \left(1+\frac{p}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{p^n}{x}\right)\cdots,$$

so ist klar, dass wir eine jede multiplicatorisch periodische Function der definirten Art setzen können gleich:

$$2) \qquad f(x) = \varphi(x) \, . \, x^r \frac{\varepsilon\left(p,-\frac{x}{a_1}\right)\varepsilon\left(p,-\frac{x}{a_2}\right)\cdots\varepsilon\left(p,-\frac{x}{a_m}\right)}{\varepsilon\left(p,-\frac{x}{b_1}\right)\varepsilon\left(p,-\frac{x}{b_2}\right)\cdots\varepsilon\left(p,-\frac{x}{b_n}\right)},$$

wenn wir unter $\varphi(x)$ eine Function verstehen, die ausser in den beiden Punkten 0 und ∞ nicht gleich Null werden kann.

Wir wollen nun zunächst annehmen, dass $\varphi(x)$ gleich einer Constanten C sei.

Aus der Definition von $\varepsilon(p,x)$ folgt unmittelbar die Gleichung:

$$\varepsilon(p,px) = \frac{1}{x}\varepsilon(p,x)$$

und hieraus:

$$f(px) = p^r \frac{a_1 a_2 \dots a_m}{b_1 b_2 \dots b_n} (-1)^{m+n} \cdot x^{n-m} \cdot f(x).$$

Da aber $f(px) = f(x)$ sein soll, so ist die letzte Gleichung nur möglich, wenn die beiden Bedingungen bestehen:

$$\text{I.} \qquad m = n,$$

$$\text{II.} \qquad p^r \frac{a_1 \, . \, a_2 \dots a_m}{b_1 \, . \, b_2 \dots b_n} = 1.$$

Weiter folgt, dass n von 1 verschieden sein muss. In der That, wäre es gleich 1, so würde aus der letzten Gleichung folgen:

$$b_1 = a_1 \, . \, p^r,$$

also

$$\varepsilon\left(p,-\frac{x}{b_1}\right) = \varepsilon\left(p,\frac{-x}{a_1 p^r}\right) = c \, . \, x^r \varepsilon\left(p,-\frac{x}{a_1}\right).$$

Hieraus aber würde folgen, dass $f(x)$ zu einer Constanten würde. Es ist dieser Fall also auszuschliessen.

Bei diesen Betrachtungen ist $\varphi(x)$ gleich einer Constanten angenommen worden. Wir nehmen jetzt den allgemeinen Fall d. h. wir setzen:

$$f(x) = \varphi(x) \, . \, \psi(x),$$

wobei dann ist:

$$\psi(x) = x^r \cdot \frac{\varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_1}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{a_m}\right)}{\varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_1}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{b_n}\right)}.$$

Diese Function $\psi(x)$ leistet dann jedenfalls der Gleichung Genüge:

$$\psi(px) = c \, . \, x^k \, . \, \psi(x).$$

Da nun $f(x)$ multiplicatorisch periodisch ist, so muss $\varphi(x)$ der Gleichung Genüge leisten:

$$\varphi(px) = \frac{1}{c \, . \, x^k} \, \varphi(x).$$

Nun erfüllt aber:

$$\psi_1(x) = \varepsilon\left(p, -\frac{x}{\alpha_1}\right) \varepsilon\left(p, -\frac{x}{\alpha_2}\right) \cdots \varepsilon\left(p, -\frac{x}{\alpha_k}\right)$$

die Gleichung:

$$\psi_1(px) = \frac{1}{c \, . \, x^k} \, \psi_1(x),$$

wenn die Grössen $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ so gewählt sind, dass:

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k = \frac{1}{c}$$

ist.

Mithin würde die Function:

$$f_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\varphi(x)}$$

der Gleichung Genüge leisten:

$$f_1(px) = f_1(x)$$

oder also wir erhalten eine multiplicatorisch periodische Function, welche für kein von Null oder Unendlich verschiedenes x unendlich wird. Eine solche ist aber unmöglich. Wir kommen zu einem Widerspruch, der nur so gelöst werden kann, dass $\varphi(x) = C$ ist. Wir haben also, indem wir den ersten Fall behandelten, zu gleicher Zeit den allgemeinen erledigt.

Bei den letzten Betrachtungen ist die stillschweigende Voraussetzung getroffen worden, dass k eine positive ganze Zahl sei. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die beiden noch übrig bleibenden Fälle, dass k negativ oder Null ist, zu einem andern Resultate nicht führen können.

Kehren wir nun zu den gefundenen Resultaten zurück, so ergab sich, dass $m = n$ sein muss oder also dass die Function ebenso oft Null wie unendlich gross werden muss. Hieraus folgt, dass dieselbe

einen jeden Werth in der Ebene ebenso oft annehmen muss. In der That, sei A ein beliebiger Werth, dann ist $f(x) - A$ wieder multiplicatorisch periodisch und wird an ebenso vielen Stellen unendlich gross wie $f(x)$, also nach dem früheren an ebenso vielen Stellen der Null gleich. Damit ist das Verlangte bewiesen. Ferner folgt, dass wenn $c_1, c_2, \dots c_n$ n solche Werthe von x sind, die sich nicht um Perioden unterscheiden, für welche $f(x) = A$ ist, die Relation bestehen muss:

$$b_1 . b_2 \dots b_n = c_1 . c_2 \dots c_n . p^s,$$

wo s eine ganze Zahl ist, die von der Wahl der Grössen c abhängt.

Fassen wir die Resultate unserer Untersuchungen zusammen, so finden wir die folgenden Sätze:

I. Es giebt keine eindeutige analytische Function $f(x)$ mit zwei wesentlichen singulären Punkten, welche für kein von $x = 0$ und $x = \infty$ verschiedenes x Null oder unendlich wird und multiplicatorisch periodisch ist.

II. Jede Function $f(x)$ nimmt jeden Werth für die gleiche Anzahl verschiedener Punkte an, die nicht durch Periodicität mit einander verbunden sind.

III. Es giebt keine Function $f(x)$, welche, von der Periodicität abgesehen, jeden Werth nur einmal annimmt.

IV. Bezeichnet p die multiplicatorische Periode von $f(x)$ und sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ zwei Reihen nicht durch Periodicität verbundener Punkte, für die $f(x)$ zwei Werthe A und B annimmt, so ist:

$$\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_n = \beta_1 . \beta_2 \dots \beta_n . p^s.$$

In dieser Gleichung hängt die ganze Zahl s von der speciellen Wahl der Grössen α und β ab.

V. Zähler und Nenner von $f(x)$ setzen sich aus einer gleichen Zahl von Factoren zusammen, die alle die Form:

$$\varepsilon\left(p, -\frac{x}{a}\right)$$

haben.

Jedenfalls folgt, dass wir als Primfunctionen unserer Functionen die Grössen $\varepsilon(p, x)$ ansehen können.

§ 15.

Entwickelung der Primfunctionen in unendliche Reihen.

Wir wollen schon jetzt die gefundene Function in eine unendliche Reihe entwickeln. Dazu setzen wir:

$$p = q^2,$$

eine Bezeichnungsweise, die ein für alle Mal beibehalten werden soll; dann lautet die Primfunction:

$$1)\ \varepsilon(q^2,x)=(1+x)(1+q^2x)(1+q^4x)\dots\left(1+\frac{q^2}{x}\right)\left(1+\frac{q^4}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{q^{2n}}{x}\right)\cdots$$

Die Umformung gestaltet sich etwas einfacher, wenn wir an Stelle von x uns qx geschrieben denken d. h. die Function in Betracht ziehen:

$$2)\qquad \varepsilon(q^2,qx)=(1+qx)(1+q^3x)\dots(1+q^{2n-1}x)\dots\left(1+\frac{q}{x}\right)\left(1+\frac{q^3}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right)\cdots$$

Setzen wir nun zunächst:

$$3)\quad \varphi(x)=(1+qx)(1+q^3x)\dots(1+q^{2n-1}x)\left(1+\frac{q}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right),$$

so ist klar, dass der Ansatz erlaubt ist:

$$4)\quad \varphi(x)=A_0+A_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+A_2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\cdots A_n\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right).$$

Nun folgt aber aus der Definition von $\varphi(x)$ unmittelbar:

$$\varphi(xq^2)(xq+q^{2n})=\varphi(x)(1+xq^{2n+1}).$$

Wendet man diese Formel auf Gleichung 4) an, so ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten von x^k links und rechts die Relation:

$$A_k(1-q^{2n+2k})=A_{k-1}q^{2k-1}(1-q^{2n-2k+2})$$

oder also wir erhalten die Beziehung:

$$A_k=A_0\cdot q^{k^2}\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-2})\dots(1-q^{2n-2k+2})}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\dots(1-q^{2n+2k})}.$$

Für den speciellen Fall $k=n$ wird:

$$A_n=A_0\cdot q^{n^2}\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-2})\dots(1-q^2)}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\dots(1-q^{4n})}.$$

Nun lässt sich aber andrerseits A_n durch directe Ausführung der Multiplication in 3) herstellen und zwar wird:

$$A_n=q^{n^2}.$$

Mithin erhalten wir für A_0 den Werth:

$$A_0=\frac{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\dots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n})}.$$

Hiermit sind wir für endlichen Werthe von n am Ziel. Es handelt sich jetzt darum, den Grenzübergang vorzunehmen, wenn n über alle Grenzen wächst. Hierbei erinnern wir an die Annahme, die den letzten

Betrachtungen zu Grunde gelegen hat, dass nämlich der absolute Betrag von p, also auch der von q kleiner als 1 ist. Unter dieser Annahme geht A_0 in den reciproken Werth des convergenten unendlichen Productes über:

$$[q^2] = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)\dots$$

d. h. es wird:

$$\lim_{n=\infty} A_0 = \frac{1}{[q^2]}.$$

Ganz analog erhalten wir:

$$\lim_{n=\infty} A_k = \frac{q^{k^2}}{[q^2]}.$$

Mit Hülfe weniger Schlüsse, auf welche kaum näher eingegangen zu werden braucht, folgt hieraus:

$$5)\qquad \varepsilon(q^2, qx) = \frac{1}{[q^2]}\left[1 + q\left(x + \frac{1}{x}\right) + q^4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + q^9\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \cdots\right].$$

So haben wir für das fundamentale Product eine unendliche Reihe gefunden und zwar gelten die Betrachtungen für alle endlichen Werthe von x, mit Ausnahme von $x = 0$, und für alle Werthe von q, für welche der absolute Betrag kleiner als 1 ist.

§ 16.[4])

Definition der doppeltperiodischen Functionen erster Art mit Hülfe der multiplicatorisch periodischen Functionen.

Wir haben im Früheren alle diejenigen eindeutigen Functionen construirt, welche der Functionalgleichung Genüge leisten:

$$1)\qquad f(px) = f(x).$$

Wir können aus ihnen durch eine einfache Substitution Functionen herleiten, die scheinbar anderen Charakters als die bisher betrachteten sind. Dazu setzen wir:

$$p = q^2,\quad q = e^{\pi i \tau},\quad x = e^{2\pi i v}.$$

Jede Function $f(x)$ der obigen Art geht dann in eine eindeutige Function von v über, die wir durch $\varphi(v)$ bezeichnen wollen. Dieselbe leistet dann, wie aus der Definition sofort folgt, der Relation Genüge:

$$2)\qquad \varphi(v + 1) = \varphi(v).$$

Ferner tritt an Stelle von px die Grösse $e^{2\pi i(v+\tau)}$ d. h. die Function leistet der weiteren Gleichung Genüge:

$$3)\qquad \varphi(v + \tau) = \varphi(v).$$

Wir haben also durch die genannte Substitution eine Function construirt, welche ungeändert bleibt, wenn man das Argument derselben um die beiden Grössen 1 und τ vermehrt. Aus jeder multiplicatorisch

periodischen eindeutigen Function kann eine Function der zuletzt definirten Art hergeleitet werden. Nennen wir eine jede Grösse c, die der Functionalgleichung Genüge leistet:

$$4)\qquad \varphi(v+c)=\varphi(v)$$

eine Periode von $\varphi(v)$, so folgt, dass 1 und τ Perioden von $\varphi(v)$ sind.

Befriedigt umgekehrt die eindeutige Function von $v:\varphi(v)$ die Gleichungen:

$$\varphi(v+1)=\varphi(v),$$
$$\varphi(v+\tau)=\varphi(v),$$

so können wir setzen:

$$v=\frac{1}{2\pi i}\log x,\quad \tau=\frac{1}{\pi i}\log p.$$

Nehmen wir an, dass $\varphi(v)$ als Function von x betrachtet in $f(x)$ übergeht, setzen wir also:

$$f(x)=\varphi\left(\frac{1}{2\pi i}\log x\right),$$

so folgt sofort, dass $f(x)$ eine eindeutige Function von x sein muss, da die verschiedenen Werthe des Logarithmus nur eine Aenderung des Argumentes um ganze Zahlen hervorbringen; es folgt aber ebenso einfach, dass die Gleichung stattfindet:

$$f(px)=f(x).$$

Damit haben wir das Resultat gefunden, dass die Theorie der multiplicatorisch periodischen Functionen auf die Theorie derjenigen Functionen zurückgeführt werden kann, welche bei einer Vermehrung des Argumentes um τ und 1 ungeändert bleiben und umgekehrt. Freilich sind hierbei die folgenden Bemerkungen von Bedeutung. Erstens musste der absolute Betrag von p verschieden von 1 sein. Setzen wir daher:

$$\tau=a+bi,$$

so muss b von Null verschieden sein. Zweitens war für eine Reihe von Betrachtungen, insbesondere für die analytischen Entwickelungen, die Annahme massgebend, dass p dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist. Wir würden also auch nur diejenigen Functionen ins Auge zu fassen haben, bei denen τ entsprechende Werthe besitzt d. h. b eine positive Grösse ist. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass der letztere Umstand keine wesentliche Beschränkung mit sich bringt, da im entgegengesetzten Falle $p=e^{-2\pi i\tau}$ zu setzen wäre.

Jedenfalls müssen wir an der Annahme festhalten, dass b positiv ist, wenn wir die analytischen Darstellungen ohne Weiteres übertragen wollen. Zwischen den beiden Grössen 1 und τ kann dann sicherlich keine Relation von der Form stattfinden:

$$m + m_1 \tau = 0,$$

wobei m und m_1 ganze Zahlen bedeuten. Nennen wir ganz allgemein zwei Grössen τ und τ_1, zwischen denen keine ganzzahlige Relation:

$$m\tau + m_1\tau_1 = 0$$

besteht, und die den Functionalgleichungen Genüge leisten:

$$\varphi(v + \tau) = \varphi(v), \quad \varphi(v + \tau_1) = \varphi(v),$$

zwei von einander unabhängige Perioden der Function $\varphi(v)$, so können wir sagen, dass die Perioden 1 und τ von einander unabhängig sein müssen.

Die auf diesem Wege gefundenen Functionen stellen nun den Inbegriff der doppelt- oder zweifachperiodischen Functionen einer Veränderlichen — und zwar, was nicht immer besonders hervorgehoben werden soll, der eindeutigen — dar, wenn wir von der folgenden Definition Gebrauch machen:

Eine doppelt- oder zweifachperiodische Function ist eine solche, welche zwei unabhängige Perioden τ und τ_1 besitzt. Es folgt dann, dass die Grössen

$$m\tau + m_1\tau_1$$

auch Perioden sind, wenn m und m_1 ganze Zahlen bedeuten.

Den Beweis der aufgestellten Behauptung geben wir nun in folgender Weise.

Erstens lässt sich nachweisen, dass das Verhältniss der beiden Grössen τ und τ_1 kein reelles sein kann. In der That, nehmen wir zuerst an, das Verhältniss wäre ein rationales:

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{m}{m_1},$$

wobei m und m_1 ganze Zahlen bedeuten, so würde zwischen τ und τ_1 eine ganzzahlige lineare homogene Relation bestehen, was gegen die Annahme ist. Ist dagegen das Verhältniss von τ und τ_1 ein irrationales, so kann man den Quotienten in einen unendlichen Kettenbruch entwickeln. Bei bekannter Bezeichnungsweise ist dann:

$$\left| \frac{\tau}{\tau_1} - \frac{M_n}{N_n} \right| < \frac{1}{N_n^2}$$

oder auch:

$$\left| \frac{\tau}{\tau_1} - \frac{M_n}{N_n} \right| = \frac{\varepsilon}{N_n^2},$$

wobei ε kleiner als die Einheit ist. Hieraus folgt:

$$N_n\tau - M_n\tau_1 = \pm \frac{\varepsilon \cdot \tau_1}{N_n}.$$

Da nun Zähler und Nenner der Näherungswerthe eines Kettenbruches mit wachsendem n ins Unendliche wachsen, so folgt hieraus, dass

$$N_n \tau - M_n \tau_1$$

beliebig klein gemacht werden kann. Wir würden also zu Functionen kommen, die ungeändert bleiben, wenn man das Argument um beliebig klein vorgelegte Grössen vermehrt. Derartige Functionen sollen aber von der Betrachtung ausgeschlossen werden.

Zweitens aber folgt leicht, dass der Fall eines allgemeinen τ und τ_1 unmittelbar darauf reducirt werden kann, dass $\tau_1 = 1$ ist. In der That, wir brauchen dazu nur an die Betrachtungen zu erinnern, die wir anstellten, um die allgemeinen additiv periodischen Functionen auf diejenigen zu reduciren, deren Periodicitätsgleichung lautet:

$$y = x + 1.$$

Daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar. Indem wir also die multiplicatorisch periodischen Functionen geschaffen haben, haben wir zu gleicher Zeit die doppeltperiodischen Functionen geschaffen und umgekehrt. Wir wollen die letzteren aus Gründen, die im Folgenden hervortreten werden, auch doppeltperiodische Functionen erster Art nennen.

§ 17.[5])

Ueber dreifachperiodische Functionen.

Wir haben im Vorigen Functionen construirt, die ungeändert bleiben, wenn man das Argument um zwei unabhängige Perioden τ und τ_1 vermehrt. Dieselben bleiben dann auch ungeändert, wenn man das Argument um $m\tau + m_1\tau_1$ vermehrt, wenn man unter m und m_1 ganze Zahlen versteht. Es fragt sich, ob hiermit alle Perioden erschöpft sind oder nicht. Die Frage kommt offenbar darauf hinaus: Giebt es Functionen, die ungeändert bleiben, wenn man das Argument um drei oder mehr von einander unabhängige Perioden vermehrt, wobei der Begriff der Unabhängigkeit unmittelbar aus dem Vorigen folgt. Mit dieser Frage hat sich Jacobi beschäftigt. Er zeigt, dass es Functionen einer Veränderlichen mit mehr als zwei unabhängigen Perioden nicht geben kann, wenn man unendlich kleine Perioden ausschliesst.

Es genügt, sich auf den Fall von drei unabhängigen Perioden zu beschränken.

Wir nehmen nun an, es gäbe Functionen mit drei unabhängigen Perioden τ_1, τ_2, τ_3, so darf zwischen diesen keine ganzzahlige lineare Relation von der Form bestehen:

$$m_1\tau_1 + m_2\tau_2 + m_3\tau_3 = 0.$$

Wir wollen nun setzen:

$$\tau_1 = a_1 + b_1 i,\quad \tau_2 = a_2 + b_2 i,\quad \tau_3 = a_3 + b_3 i,$$

$$A_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2,\quad A_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3,\quad A_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

so folgt, dass auch zwischen den Grössen A_1, A_2, A_3 keine ganzzahlige, lineare Relation von der Form bestehen kann:

$$\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \nu_3 A_3 = 0.$$

In der That, sei die Annahme falsch, es bestehe vielmehr die soeben hingeschriebene Relation. Sind dann:

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3,\quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

sechs beliebige ganze Zahlen, so bilden wir die Perioden:

$$u + iv = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \end{vmatrix}$$

$$u_1 + iv_1 = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

Diese beiden Perioden müssen unter Anwendung ähnlicher Schlüsse wie im vorigen Paragraphen einen imaginären Quotienten haben. Bildet man aber den Ausdruck:

$$uv_1 - vu_1,$$

so ergiebt sich derselbe nach einigen leichten Rechnungen gleich:

$$\begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

also gleich Null. Das ist aber mit der soeben angegebenen Eigenschaft der beiden Grössen $u + iv$ und $u_1 + iv_1$ in Widerspruch. Dieser Widerspruch kann nur so gelöst werden, dass keine Relation von der Form:

$$\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \nu_3 A_3 = 0$$

möglich ist. Hieraus folgt, dass das Verhältniss je zweier der Grössen A_1, A_2, A_3 keine rationale Zahl sein kann. Es wird somit das Verhältniss $A_2 : A_1$ in einen unendlichen elementaren Kettenbruch entwickelt werden können. Hierbei findet genau wie früher die Beziehung statt:

$$\left| \frac{A_2}{A_1} - \frac{M_n}{N_n} \right| < \frac{1}{N_n^2}$$

oder:

$$\left| N_n \frac{A_2}{A_1} - M_n \right| < \frac{1}{N_n}.$$

Da nun Zähler wie Nenner der Näherungsbrüche ins Unendliche wachsen, so lassen sich zwei ganze Zahlen ε_1 und ε_2 derart bestimmen, dass

$$\varepsilon_1 \frac{A_2}{A_1} - \varepsilon_2 = \varDelta$$

dem absoluten Betrage nach kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig klein gegebene Zahl, und es ist die Menge dieser Zahlen ε_1 und ε_2 unendlich gross. Bestimmt man nun zu jeder Combination von ε_1 und ε_2 eine dritte ganze Zahl ε_3 so, dass

$$\varepsilon_1 \frac{A_3}{A_1} - \varepsilon_3 = \varDelta'$$

dem absoluten Betrage nach kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ ist, was stets und nur auf eine Weise möglich ist, so werden sich durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen mit resp. a_2, a_3 und b_2, b_3 und durch Addition derselben, wie leicht folgt, die Beziehungen ergeben:

$$a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3 = -(a_2 \varDelta + a_3 \varDelta')$$
$$b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_3 = -(b_2 \varDelta + b_3 \varDelta'),$$

und es ist somit gezeigt, dass sich ganze Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ in beliebiger Anzahl bestimmen lassen, welche den absoluten Betrag von:

$$a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3,$$
$$b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_3$$

nicht grösser als resp. den absoluten Betrag von $\frac{a_3}{2}$ und $\frac{b_3}{2}$ machen.

Setzt man also:

$$a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3 = a_4,$$
$$b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_3 = b_4,$$

so folgt:

$$\left| a_4 \right| \leq \frac{1}{2} \left| a_3 \right|, \quad \left| b_4 \right| \leqq \frac{1}{2} \left| b_3 \right|.$$

Gehen wir jetzt von dem Grössencomplex:

$$a_2, a_3, a_4,$$
$$b_2, b_3, b_4$$

aus, so folgt leicht, dass keine linearen homogenen ganzzahligen Gleichungen von der Form:

$$\mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4 = 0$$
$$\mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 + \mu_4 b_4 = 0$$

bestehen können. Es folgt das, wenn wir uns die Ausdrücke für a_4, b_4 eingesetzt denken.

Es kann ferner keine lineare Relation von der Form bestehen:

$$\nu_1 (a_3 b_4 - a_4 b_3) + \nu_2 (a_4 b_2 - a_2 b_4) + \nu_3 (a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0.$$

Auch dieses folgt, wenn wir die Ausdrücke für a_4 und b_4 einsetzen. Es genügen also die Grössen:

$$a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4$$

genau denselben Bedingungen wie die Grössen:

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.$$

Wir können daher unendlich viele ganze Zahlen η_1, η_2, η_3 derart bestimmen, dass die Grössen a_5, b_5:

$$a_5 = \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3 + \eta_4 a_4,$$
$$b_5 = \eta_2 b_2 + \eta_3 b_3 + \eta_4 b_4$$

den Ungleichungen Genüge leisten:

$$\left| a_5 \right| < \frac{1}{2} \left| a_4 \right|, \quad \left| b_5 \right| \leq \frac{1}{2} \left| b_4 \right|.$$

Nun folgen aber unmittelbar die Gleichungen:

$$\varepsilon_1 \eta_4 a_1 + (\varepsilon_2 \eta_4 + \eta_2) a_2 + (\varepsilon_3 \eta_4 + \eta_3) a_3 = a_5,$$
$$\varepsilon_1 \eta_4 b_1 + (\varepsilon_2 \eta_4 + \eta_2) b_2 + (\varepsilon_3 \eta_4 + \eta_3) b_3 = b_5.$$

Es giebt also unendlich viele ganze Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, welche die Zahlen a_5, b_5:

$$a_5 = \zeta_1 a_1 + \zeta_2 a_2 + \zeta_3 a_3,$$
$$b_5 = \zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \zeta_3 b_3$$

derart bestimmen, dass sie den Ungleichungen Genüge leisten:

$$\left| a_5 \right| \leq \frac{1}{2} \left| a_4 \right| \leq \frac{1}{4} \left| a_3 \right|,$$

$$\left| b_5 \right| \leq \frac{1}{2} \left| b_4 \right| \leq \frac{1}{4} \left| b_3 \right|.$$

Geht man jetzt von den Zahlen:

$$a_2, a_3, a_5, b_2, b_3, b_5$$

aus und so fort, so findet man, dass es unendlich viele ganze Zahlen p_1, p_2, p_3 giebt, für welche:

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3,$$
$$p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3$$

resp. kleiner oder gleich sind:

$$\frac{1}{2^n} \left| a_3 \right|, \quad \frac{1}{2^n} \left| b_3 \right|.$$

Diese Ausdrücke werden aber, wenn n immer mehr und mehr wächst, unendlich klein. Unter solchen Umständen würde sich also die Existenz unendlich kleiner Perioden ergeben. Von derartigen

Functionen sehen wir ab. Zu gleicher Zeit folgt, dass unsere doppeltperiodischen Functionen andere Perioden als die Grössen

$$m + m_1 \tau$$

nicht besitzen können.

§ 18.[6])

Die Haupteigenschaften der doppeltperiodischen Functionen erster Art. Einführung der ϑ_1-Function. Haupteigenschaften derselben.

Aus den angestellten Betrachtungen folgt, dass wir aus den Theoremen, die für die multiplicatorisch periodischen Functionen aufgestellt worden sind, sofort entsprechende Theoreme für die doppeltperiodischen Functionen ableiten können. Zunächst folgt, dass alle in Betracht zu ziehenden doppeltperiodischen Functionen nur einen wesentlichen singulären Punkt besitzen können, nämlich den Punkt $x = \infty$. Es folgt dieses Resultat aus der Substitution, die wir anwenden mussten, um aus den multiplicatorisch periodischen doppeltperiodische Functionen abzuleiten.

Wir haben gesetzt: $x = e^{2\pi i v}$.

Bei dieser Substitution entspricht aber $x = 0$ sowohl, als auch $x = \infty$ ein unendlicher Werth von v.

Es sind demnach die von uns in Betracht zu ziehenden Functionen gebrochene transcendente Functionen und zwar im engeren Sinne.

Ferner folgen sofort die folgenden fundamentalen Sätze:

I. Es giebt keine doppeltperiodische Function, welche im Endlichen nirgends Null oder unendlich gross wird.

II. Jede doppeltperiodische Function nimmt, abgesehen von Vielfachen der Perioden, einen jeden Werth gleich oft an und zwar mindestens zweimal.

III. Wird eine doppeltperiodische Function, abgesehen von Vielfachen der Perioden, an den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ Null, an den Punkten $b_1, b_2, \ldots b_n$ unendlich (oder nimmt sie an diesen Punkten zwei andere Werthe an), so ist:

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n = b_1 + b_2 + \cdots b_n + m + m_1 \tau,$$

wobei m und m_1 ganze Zahlen bedeuten.

Endlich lassen sich alle unsere Functionen aus gewissen elementaren Functionen zusammensetzen.

In der ursprünglichen Form können wir hierfür die Functionen wählen:

$$\varepsilon(q^2, -x) = (1-x)(1-q^2x)(1-q^4x)\ldots\left(1-\frac{q^2}{x}\right)\left(1-\frac{q^4}{x}\right)\cdots$$

Setzen wir nun: $x = e^{2\pi i v}, \quad q = e^{\pi i \tau},$

wobei τ der von uns angegebenen Bedingung Genüge leistet, so erhalten wir die Function:

$$(1 - e^{2\pi i v})\prod_{1}^{\infty}(1 - q^{2n}e^{2\pi i v})(1 - q^{2n}e^{-2\pi i v}).$$

Es ist dieses Product für alle endlichen Werthe von v unbedingt convergent.

Für dieses Product haben wir aber einen zweiten Ausdruck in der Form einer unendlichen Reihe gefunden, die wir, wie leicht folgt, in der neuen Bezeichnungsweise schreiben können:

$$\frac{-e^{2\pi i v}}{[e^{2\pi i \tau}]}[1 - e^{\pi i \tau}(e^{\pi i(2v+\tau)} + e^{-\pi i(2v+\tau)}) + e^{4\pi i \tau}(e^{2\pi i(2v+\tau)} + e^{-2\pi i(2v+\tau)}) + \cdots].$$

Wir können an Stelle der diesen beiden Werthen entsprechenden Gleichung auch die folgende schreiben:

$$1) \quad 2q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v\prod_{1}^{\infty}(1 - q^{2n})\prod_{1}^{\infty}(1 - q^{2n}e^{2\pi i v})(1 - q^{2n}e^{-2\pi i v})$$
$$= -i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)\pi i v}.$$

Die linke Seite ist dann nicht mehr gleich der Elementarfunction, aus welcher wir alle doppeltperiodischen Functionen zusammengesetzt haben, sie unterscheidet sich von derselben aber so unwesentlich, dass wir sie füglich als fundamentale unseren Betrachtungen zu Grunde legen können. Wir wollen dieselbe durch:

$$\vartheta_1(v, \tau)$$

bezeichnen, v ihr Argument, τ ihren Modul nennen. Wo kein Zweifel über den Werth des letzteren vorhanden ist, werden wir die Function auch durch

$$\vartheta_1(v)$$

bezeichnen.

Dann folgt im Anschluss an die ersten Betrachtungen dieses Paragraphen:

IV. Eine jede doppeltperiodische Function erster Art $f(v)$ lässt sich in die Form bringen:

$$f(v) = e^{-2\pi i m_1 v}\frac{\vartheta_1(v - a_1)\,\vartheta_1(v - a_2)\ldots\vartheta_1(v - a_n)}{\vartheta_1(v - b_1)\,\vartheta_1(v - b_2)\ldots\vartheta_1(v - b_n)},$$

wobei m_1 eine ganze Zahl bedeutet und überdies die Beziehung stattfindet:

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n - b_1 - b_2 \cdots - b_n = m + m_1\tau.$$

Wir haben für die ϑ_1-Function zwei analytische Darstellungen gefunden:

$$\vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \prod_1^\infty (1 - q^{2n} e^{2\pi i v})(1 - q^{2n} e^{-2\pi i v})$$

$$= -i \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi i v}.$$

Aus diesen folgen unmittelbar die beiden folgenden:

$$2) \quad \vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n})$$

$$= 2 \sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\pi v.$$

Die letzte Summe können wir auch schreiben:

$$\vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v \ldots$$

Wir wollen hieran noch eine fünfte Darstellung in der Form eines unendlichen Doppelproductes schliessen.

Es ist:

$$\vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \sin \pi v \prod_1^\infty (1 - e^{2\pi i n\tau + 2\pi i v})(1 - e^{2\pi i n\tau - 2\pi i v})$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \sin \pi v \prod_1^\infty (1 - 2e^{2\pi i n\tau} \cos 2\pi v + e^{4\pi i n\tau})$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \sin \pi v \prod_1^\infty e^{2\pi i n\tau}(e^{-2\pi i n\tau} - 2\cos 2\pi v + e^{2\pi i n\tau})$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) \sin \pi v \prod_1^\infty e^{2\pi i n\tau}(2\cos 2\pi n\tau - 2\cos 2\pi v).$$

Hieraus folgt:

$$\vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n})^3 \sin \pi v \prod_1^\infty \frac{\sin(v + n\tau)\pi \,.\, \sin(v - n\tau)\pi}{\left(\dfrac{e^{\pi i n\tau} - e^{-\pi i n\tau}}{2}\right)^2}$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n})^3 \sin \pi v \prod_1^\infty \frac{\sin(v + n\tau)\pi \,.\, \sin(n\tau - v)\pi}{(\sin n\pi\tau)^2}$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n})^3 \sin \pi v \prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(v + n\tau)\pi}{\sin(n\tau\pi)}.$$

Erwägen wir nun, dass die Productentwickelung stattfindet:

$$\sin \pi x = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\cdots,$$

so folgt die weitere Darstellung:

$$3)\qquad \vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}}\prod_1^{\infty}(1-q^{2n})^3\pi v\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(1-\frac{v}{m+n\tau}\right),$$

wobei die Combination $m = n = 0$ auszuschliessen ist. Dieses Doppelproduct, welches in unserm Ausdrucke vorkommt, dessen Convergenz unmittelbar hervorgeht, ist derart auszuführen, dass zuerst nach m von $-\mu$ bis $+\mu$ ($\mu = \infty$), dann nach n von $-\nu$ bis $+\nu$ ($\nu = \infty$) multiplicirt wird. Dasselbe ändert seinen Werth bei Anordnung der Factoren. Mit derartigen Producten hat sich in ausführlicher Weise Eisenstein beschäftigt.

Die Haupteigenschaften der ϑ_1-Function folgen unmittelbar aus den bisherigen Betrachtungen.

I. Die ϑ_1-Function ist eine ungerade, ganze transcendente Function ihres Argumentes, welche als Nullstellen die Werthe:

$$v = m + m_1\tau$$

besitzt.

II. Dieselbe leistet den Gleichungen Genüge:

$$\vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v),$$
$$\vartheta_1(v+\tau) = -e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_1(v).$$

Die erste Gleichung ist unmittelbar klar, die zweite folgt am einfachsten, wenn wir von der Definitionsgleichung ausgehen:

$$\vartheta_1(v) = -i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2n+1)\pi i v}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung rechts an Stelle von n: $n+1$, so wird dieselbe:

$$\vartheta_1(v) = -i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{n+1}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.e^{(2n+1)\pi i(v+\tau)}.q.e^{2\pi i v} = -e^{\pi i(2v+\tau)}\vartheta_1(v+\tau).$$

Damit ist das Verlangte bewiesen.

§ 19.

Die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art. Darstellung und Haupteigenschaften derselben.

Wir haben gezeigt, wie man mit Hülfe der ϑ_1-Function doppeltperiodische Functionen erster Art schaffen kann. Lassen wir die Bedingung fallen, die zwischen den Grössen a und b bestand, so kommen wir zu Functionen, die bei der Vermehrung des Argumentes um τ in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergehen.

Wir wollen nun allgemein eine jede Function, die bei der Vermehrung ihres Arguments um zwei unabhängige Constanten in sich

selbst multiplicirt mit je einer Constanten übergeht, eine **doppeltperiodische Function zweiter Art** nennen. Die zuerst definirten Constanten nennen wir die Perioden derselben.

Ohne Weiteres können wir dann annehmen, dass eine der beiden Grössen, um welche das Argument vermehrt gedacht wird, der Einheit gleich sei. Wir werden daher annehmen können, dass die allgemeinen doppeltperiodischen Functionen zweiter Art den Gleichungen Genüge leisten:

$$f(v+1) = af(v), \tag{1}$$

$$f(v+\tau) = a_1 f(v), \tag{2}$$

wobei a und a_1 fest vorgelegte Grössen bedeuten. Wir können nun, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Abbruch zu thun, annehmen, dass eine der beiden Grössen a und a_1, z. B. die Grösse a, der Einheit gleich sei.

In der That, betrachten wir dazu die Function:

$$F(v) = f(v) \, . \, e^{\lambda v},$$

wo λ eine Constante ist, so leistet diese den Gleichungen Genüge:

$$F(v+1) = e^{\lambda} \, . \, a \, . \, F(v),$$
$$F(v+\tau) = a^{\lambda\tau} \, . \, a_1 \, . \, F(v).$$

Nun kann aber λ immer so bestimmt werden, dass der Gleichung Genüge geleistet wird:

$$e^{\lambda} \, . \, a = 1.$$

Dann sind für $F(v)$ die genannten Bedingungen erfüllt. Kennen wir aber die Darstellung und die Eigenschaften von $F(v)$, so kennen wir auch die von $f(v)$, so dass das Verlangte bewiesen ist. Wir können also den folgenden Betrachtungen die beiden Gleichungen zu Grunde legen:

$$f(v+1) = f(v), \tag{3}$$

$$f(v+\tau) = e^{\lambda} . f(v), \tag{4}$$

wenn wir die noch übrig bleibende Constante in der Form e^{λ} schreiben, wobei λ von der vorhin mit λ bezeichneten Grösse verschieden ist.

Es ist nun nicht schwer, specielle Functionen zu finden, welche diesen beiden Gleichungen Genüge leisten.

In der That, wir wollen setzen:

$$\varphi(v) = \frac{\vartheta_1(v-a_1)\,\vartheta_1(v-a_2)\ldots\vartheta_1(v-a_\nu)}{\vartheta_1(v-b_1)\,\vartheta_1(v-b_2)\ldots\vartheta_1(v-b_\nu)},$$

so leistet $\varphi(v)$ den Gleichungen Genüge:

$$\varphi(v+1) = \varphi(v),$$
$$\varphi(v+\tau) = e^{2\pi i(a_1 + \cdots a_\nu - b_1 \cdots - b_\nu)}\,\varphi(v).$$

Setzen wir also:

$$2\pi i(a_1 + \cdots a_\nu - b_1 \cdots - b_\nu) = \lambda,$$

so leistet $\varphi(v)$ den beiden vorgelegten Bedingungsgleichungen Genüge.

Haben wir aber eine Function gefunden, die den aufgestellten Bedingungsgleichungen Genüge leistet, so haben wir alle gefunden, denn der Quotient der gesuchten allgemeinen Function und der speciell construirten ist eine doppeltperiodische Function erster Art, wie wir sie im Vorigen genauer untersucht haben. Dann folgt aber weiter, dass die Sätze, die für die Functionen erster Art gefunden sind, wenigstens theilweise ohne Schwierigkeit auf die Functionen zweiter Art übertragen werden können. Wir erhalten die Sätze:

I. Es giebt keine doppeltperiodische Function zweiter Art, welche im Endlichen nicht Null oder unendlich wird.

II. Jede doppeltperiodische Function zweiter Art wird, von Vielfachen von Perioden abgesehen, gleich oft Null und unendlich.

III. Eine jede doppeltperiodische Function zweiter Art lässt sich in die Form bringen:

$$f(v) = e^{-2\pi i m_1 v} \frac{\vartheta_1(v-a_1)\ldots\vartheta_1(v-a_n)}{\vartheta_1(v-b_1)\ldots\vartheta_1(v-b_n)},$$

wobei zwischen den Grössen a und b die Relationen bestehen:

$$2\pi i(a_1 + \cdots a_n) = 2\pi i(b_1 + \cdots b_n + m + m_1\tau) + \lambda.$$

In der letzten Gleichung sind m und m_1 ganze Zahlen, während λ eine beliebige Grösse bedeutet.

§ 20.

Die doppeltperiodischen Functionen dritter Art. Darstellung und Haupteigenschaften derselben.

Wir wollen den Begriff der doppeltperiodischen Functionen noch mehr verallgemeinern. Unter einer doppeltperiodischen Function dritter Art soll von jetzt an eine jede Function verstanden werden, die den Gleichungen Genüge leistet:

$$1)\qquad f(v + \tau_1) = e^{av+b}.f(v),$$

$$2)\qquad f(v + \tau) = e^{a_1 v + b_1} f(v).$$

Die Grössen τ und τ_1 nennen wir auch jetzt die Perioden der Function und nehmen an, dass sie von einander unabhängig seien. Dann folgt sofort, dass wir auch hier berechtigt sind, eine der beiden Grössen τ und τ_1, z. B. τ_1 der Einheit gleich anzunehmen, sodass wir

als Bedingungsgleichungen der allgemeinen doppeltperiodischen Functionen dritter Art die folgenden zu Grunde legen können:

$$3)\qquad f(v+1) = e^{av+b}.f(v),$$

$$4)\qquad f(v+\tau) = e^{a_1 v + b_1} f(v).$$

Es ist zunächst klar, dass die beiden Grössen a und a_1 nicht völlig willkürlich sein können, sondern die Gleichung erfüllen müssen:

$$a_1 = a\tau + 2\mu\pi i \qquad (\mu \text{ eine ganze Zahl}).$$

Es folgt dieses, wenn wir die beiden Ausdrücke bilden $f(v+1+\tau)$ und $f(v+\tau+1)$ und diese einander gleich setzen. Führen wir ferner an Stelle der Function $f(v)$ die Function $F(v)$ durch die Gleichung ein:

$$F(v) = e^{-\frac{1}{2}[av^2+(2b-a)v]} f(v),$$

so genügt diese den einfacheren Bedingungsgleichungen:

$$5)\qquad F(v+1) = F(v),$$

$$6)\qquad F(v+\tau) = e^{2\mu\pi i v + \lambda} F(v).$$

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass wir auch andere Formen hätten zu Grunde legen können, z. B. eine solche, bei welcher die Gleichung besteht:

$$F(v+1) = -F(v)$$

an Stelle der vorhin betrachteten:

$$F(v+1) = F(v) \qquad \text{u. s. f.}$$

Wir wollen zunächst uns aber auf die obigen Gleichungen beschränken. In ihnen ist μ eine ganze Zahl, ferner:

$$\lambda = b_1 - b\tau + \frac{a\tau}{2}(1-\tau).$$

Diese letzte Form zeigt, dass die Functionen dritter Art die Functionen erster und zweiter Art als specielle Fälle in sich enthalten. Ist $\mu = 0$, so haben wir den Fall der Functionen zweiter Art vor uns, ist auch $\lambda = 0$, den der gewöhnlichen doppeltperiodischen.

Es ist nun nicht schwer, eine specielle Function zu finden, welche den aufgestellten Bedingungsgleichungen Genüge leistet. In der That, bilden wir den Ausdruck:

$$\varphi(v) = e^{-\mu\pi i v} \frac{\vartheta_1(v-a_1)\ldots\vartheta_1(v-a_n)}{\vartheta_1(v-b_1)\ldots\vartheta_1(v-b_{n+\mu})},$$

so leistet derselbe den Gleichungen Genüge:

$$\varphi(v+1) = \varphi(v),$$

$$\varphi(v+\tau) = e^{2\mu\pi i v + 2\pi i\left(\Sigma a_i - \Sigma b_k + \frac{\mu}{2}\right)} \varphi(v).$$

Setzen wir also:
$$2\pi i\left(\Sigma a_i - \Sigma b_k + \frac{\mu}{2}\right) = \lambda,$$
so leistet $\varphi(v)$ genau den obigen Bedingungsgleichungen Genüge.

Damit haben wir aber wieder das allgemeine Problem gelöst, denn der Quotient der gesuchten allgemeinen und der speciellen gefundenen Function ist eine doppeltperiodische Function erster Art, wie bekannt. Wir finden somit die Resultate:

I. Das Problem, alle doppeltperiodischen Functionen dritter Art zu finden, kann auf das Problem reducirt werden, alle Functionen zu finden, die den beiden Gleichungen Genüge leisten:
$$f(v+1) = f(v),$$
$$f(v+\tau) = e^{2\mu\pi i v + \lambda} f(v),$$
wobei μ eine ganze Zahl ist und zwar gleich der Differenz der Unendlichkeitspunkte und der Nullpunkte.

II. Eine jede Function dritter Art, welche den vorhin aufgestellten Bedingungsgleichungen Genüge leistet und welche die Nullstellen $a_1, a_2, \ldots a_n$ und die Unendlichkeitsstellen $b_1, b_2, \ldots b_{n+\mu}$ besitzt, lässt sich in der Form darstellen:
$$f(v) = e^{-(2m_1+\mu)\pi i v} \frac{\vartheta_1(v-a_1)\ldots\vartheta_1(v-a_n)}{\vartheta_1(v-b_1)\ldots\vartheta_1(v-b_{n+\mu})},$$
wobei dann die Beziehung bestehen muss:
$$\Sigma a_i - \Sigma b_k + \frac{\mu}{2} = m + m_1\tau + \frac{\lambda}{2\pi i}.$$

§ 21.[7])

Definition der Thetafunctionen n^{ter} Ordnung. Hermite'sches Transformationsprincip.

Nachdem die Gesammtheit aller doppeltperiodischen Functionen dargestellt worden ist, wollen wir an eine specielle Theorie herangehen, indem wir zunächst specielle Kategorien herausgreifen. Die zunächst liegenden werden diejenigen sein, welche ganze transcendente Functionen sind. Wir haben dieselben unter den Functionen dritter Art zu suchen. Zunächst ist die Function $\vartheta_1(v)$ mit sammt ihren positiven Potenzen eine Function der genannten Art. Es genügt nämlich $\vartheta_1{}^n(v)$ den Gleichungen:
$$\vartheta_1{}^n(v+1) = (-1)^n \vartheta_1{}^n(v),$$
$$\vartheta_1{}^n(v+\tau) = (-1)^n e^{-\pi i n(2v+\tau)} \vartheta_1{}^n(v),$$
und ist daneben eine ganze transcendente Function. Wir wollen nun von jetzt an eine jede ganze transcendente Function $f(v)$, welche den Gleichungen Genüge leistet:

$$f(v+1) = (-1)^g f(v),$$
$$f(v+\tau) = (-1)^h e^{-\pi i n(2v+\tau)} f(v),$$

wobei n eine ganze positive Zahl bedeutet, eine Thetafunction n^{ter} Ordnung nennen. Wir wollen ferner den Zahlencomplex (g,h) die Charakteristik der Thetafunction nennen. Es giebt dann vier wesentlich verschiedene Charakteristiken, nämlich $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, von denen wir die drei ersten gerade, die letzte ungerade nennen wollen. Zunächst folgt dann aus unseren Sätzen, dass eine jede solche Function, von Vielfachen von Perioden abgesehen, n Nullpunkte besitzt, zwischen denen eine Relation besteht.

Die Theorie dieser Functionen nun kann auf den folgenden Satz basirt werden, welcher von Hermite herrührt.

Lehrsatz: Es giebt nur n linear von einander unabhängige Thetafunctionen n^{ter} Ordnung, die denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten oder auch zwischen $n+1$ Thetafunctionen n^{ter} Ordnung, die denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten, muss mindestens eine lineare Relation bestehen.

Den Beweis dieses fundamentalen Satzes geben wir nur für eine Charakteristik, nämlich die Charakteristik $(0,0)$.

Eine jede ganze transcendente Function, die sich nicht ändert, wenn wir das Argument v um die Einheit vermehren, kann sicherlich in die Form gebracht werden:

1) $$f(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} A_r \, . \, e^{2r\pi i v}.$$

Wir wollen setzen:
$$A_r = c_r \, . \, e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{n}},$$

so sind dann die Grössen c_r auch ihrerseits wie die Grössen A_r Constanten. Es folgt dann:

$$f(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} c_r \, . \, e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{n}} \, . \, e^{2r\pi i v}.$$

Nun leistet $f(v)$ aber nach Annahme der weiteren Bedingungsgleichung Genüge:
$$f(v+\tau) = e^{-n\pi i(2v+\tau)} f(v),$$
also folgt:
$$\Sigma c_r \, . \, e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{n}} \, . \, e^{2r\pi i(v+\tau)} = e^{-n\pi i(2v+\tau)} \, \Sigma c_r \, . \, e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{n}} \, . \, e^{2r\pi i v},$$
oder es wird:
$$\Sigma c_r \, . \, e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{n}} \, . \, e^{2r\pi i v} = \Sigma c_r e^{\pi i (r+n)^2 \frac{\tau}{n} + 2\pi i (r+n) v}.$$

Auf der rechten Seite setzen wir an Stelle von $r + n : r$, dann ist die Summation auch jetzt von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen und wir erhalten die Gleichung:

$$\Sigma c_r . e^{\pi i r^2 \frac{\tau}{n}} . e^{2 r \pi i v} = \Sigma c_{r-n} . e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{n}} . e^{2 r \pi i v}.$$

Hieraus folgt durch Vergleichung der Coefficienten der einzelnen Potenzen von $e^{2\pi i v}$, dass die Relationen stattfinden müssen:

$$c_r = c_{r-n}$$

oder also der Reihe nach:

$$c_n = c_0,$$
$$c_{n+1} = c_1,$$
$$c_{n+2} = c_2,$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$c_{n+r} = c_r$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Jedenfalls folgt also, dass höchstens n der Grössen c willkürlich sein können, etwa die Grössen $c_0, \dots c_{n-1}$, und dass wir eine jede Thetafunction n^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $(0, 0)$ in die Form bringen können:

$$2) \qquad f(v) = c_0 . A_0 + c_1 . A_1 + \cdots c_{n-1} . A_{n-1},$$

wobei die Grössen $A_0, \dots A_{n-1}$ n eindeutig bestimmte ganze transcendente Functionen bedeuten, während die Grössen $c_0, c_1, \dots c_{n-1}$ willkürliche Constanten sind. Dabei haben die Grössen A die Werthe:

$$A_0 = \Sigma e^{\pi i r^2 n \tau + 2 r n \pi i v},$$
$$A_1 = \Sigma e^{\pi i (rn+1)^2 \frac{\tau}{n} + 2(rn+1)\pi i v},$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$A_m = \Sigma e^{\pi i (rn+m)^2 \frac{\tau}{n} + 2(rn+m)\pi i v},$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Daraus können wir aber die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar erweisen. In der That, seien $n + 1$ Thetafunctionen mit der nämlichen Charakteristik $(0, 0)$ vorgelegt, so lassen sich dieselben sämmtlich linear durch die n Grössen $A_0, A_1 \dots A_{n-1}$ ausdrücken, also muss zwischen ihnen mindestens eine lineare Relation bestehen. Damit ist der Hermite'sche Fundamentalsatz für die Charakteristik $(0, 0)$ bewiesen. Genau so einfach kann er für die übrigen Charakteristiken bewiesen werden, genau so einfach würde aber auch der folgende allgemeine Lehrsatz bewiesen werden können.

Lehrsatz: Es giebt höchstens n von einander linear unabhängige ganze transcendente doppeltperiodische Functionen dritter Art, die denselben Bedingungsgleichungen

Genüge leisten und an n und nur n Punkten der Null gleich werden, oder auch zwischen je $n+1$ Functionen der genannten Art muss mindestens eine lineare Relation bestehen.

§ 22.

Die Thetafunctionen erster Ordnung. Darstellung und einfachste Beziehungen zwischen denselben.

Besonders einfach gestalten sich die Untersuchungen des vorigen Paragraphen im Falle der Thetafunctionen erster Ordnung. In demselben folgt, dass es vier und nur vier Thetafunctionen giebt, die bis auf eine Constante eindeutig bestimmt sind. Ihren Werth können wir aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen unmittelbar hinschreiben. Wir wollen ganz allgemein setzen:

$$1)\qquad \vartheta_{gh}(v) = (-i)^{gh} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} (-1)^{hn} e^{\pi i \tau \left(n+\frac{g}{2}\right)^2 + 2\pi i v \left(n+\frac{g}{2}\right)}$$

oder indem wir specialisiren:

$$2)\qquad \vartheta_{00}(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} q^{n^2} . e^{2\pi i n v},$$

$$3)\qquad \vartheta_{01}(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} (-1)^n q^{n^2} . e^{2\pi i n v},$$

$$4)\qquad \vartheta_{10}(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} . e^{\pi i (2n+1) v},$$

$$5)\qquad \vartheta_{11}(v) = -i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} . e^{\pi i (2n+1) v}.$$

Dabei können wir dann die charakteristischen Gleichungen durch die einzige Formel darstellen:

$$6)\qquad \vartheta_{gh}(v + m + m_1\tau) = (-1)^{mg + m_1 h} \vartheta_{gh}(v) e^{-m_1 \pi i (2v + m_1 \tau)}.$$

Die Function $\vartheta_{11}(v)$ ist dann mit der Ausgangsfunction $\vartheta_1(v)$ identisch. Man schreibt die definirten Functionen in denjenigen Fällen, in denen der Werth des Parameters τ hervorgehoben werden soll, auch:

$$\vartheta_{gh}(v, \tau),$$

endlich bezeichnet man die vier eingeführten Functionen häufig in einfacherer Weise durch:

$$\vartheta_3(v),\ \vartheta_0(v),\ \vartheta_2(v),\ \vartheta_1(v)$$

oder auch:

$$\vartheta_3(v, \tau),\ \vartheta_0(v, \tau),\ \vartheta_2(v, \tau),\ \vartheta_1(v, \tau).$$

Von den vier Thetafunctionen sind diejenigen, welche gerade Charakteristiken besitzen, gerade Functionen, $\vartheta_{11}(v)$ dagegen, welches eine ungerade Charakteristik besitzt, eine ungerade Function.

Alle übrigen Thetafunctionen erster Ordnung können sich von den soeben entwickelten nur um eine Constante unterscheiden. Diese Constante wird im Allgemeinen von τ abhängen. Dieser Umstand fällt fort, wenn wir eine weitere Bedingungsgleichung hinzunehmen, welcher die vier Thetafunctionen erster Ordnung Genüge leisten, nämlich die Differentialgleichung:

$$7)\qquad \frac{\partial^2 \vartheta_{gh}(v,\tau)}{\partial v^2} = 4\pi i\,\frac{\partial \vartheta_{gh}(v,\tau)}{\partial \tau}.$$

Die Richtigkeit der Behauptung folgt durch directes Differenziren, indem wir bemerken, dass gliedweise differenzirt werden kann, da unsere Reihen die Bedingungen erfüllen, die hierzu nothwendig sind.

Nehmen wir diese Bemerkungen hinzu, so folgt der weitere

Lehrsatz: Alle Thetafunctionen erster Ordnung, welche überdies der aufgestellten partiellen Differentialgleichung Genüge leisten, können sich von einer der vier aufgestellten Thetafunctionen $\vartheta_{gh}(v)$ nur um eine rein numerische Constante unterscheiden.

Wir geben den Beweis für die Charakteristik (0, 0).

Eine jede Thetafunction erster Ordnung mit der Charakteristik (0, 0) hat dann die Form:

$$f(v) = c \,.\, \vartheta_{00}(v),$$

wobei die Grösse c sehr wohl von τ abhängen kann. Nun soll aber die Gleichung gelten:

$$\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial f(v)}{\partial \tau}$$

oder also:

$$c\frac{\partial^2 \vartheta_{00}(v)}{\partial v^2} = 4\pi i c \frac{\partial \vartheta_{00}(v)}{\partial \tau} + 4\pi i \vartheta_{00}(v) \frac{dc}{d\tau}$$

oder also vermöge der Differentialgleichung, welche wir für die Function $\vartheta_{00}(v)$ gefunden haben:

$$\frac{dc}{d\tau} = 0.$$

Damit ist der Beweis geliefert.

Zwischen den vier soeben eingeführten Thetafunctionen bestehen Beziehungen einfachster Natur. Es zeigt sich nämlich, dass die Functionen abgesehen von Exponentialfactoren in einander übergehen, wenn wir das Argument v um halbe Perioden vermehren. In der That, zunächst folgt unmittelbar aus den Definitionsgleichungen:

$$\vartheta_0(v) = \vartheta_3\left(v - \frac{1}{2}\right),$$

$$\vartheta_1(v) = \vartheta_2\left(v - \frac{1}{2}\right),$$

ferner aber ergiebt sich ganz analog wie seinerzeit bei der Vermehrung von v und τ die Formel:

$$\vartheta_1(v) = -i\,.\,\vartheta_0\left(v + \frac{\tau}{2}\right) e^{\frac{\pi i}{2}\left(2v + \frac{\tau}{2}\right)}.$$

Durch Combination dieser drei Formeln ergiebt sich das Resultat, dass eine jede der vier Thetafunctionen aus einer jeden andern, von einem Exponentialfactor abgesehen, durch Vermehrung des Argumentes um halbe Perioden hergeleitet werden kann. Die Formeln gestalten sich allgemeiner, wenn wir die Formeln für die Vermehrung des Argumentes um ganzzahlige Multipla der Perioden hinzunehmen. Es ergeben sich dann Resultate, die wir in der folgenden Tabelle zusammenfassen können:

Vermehrung	ϑ_0	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	Exponentialgrösse
$m + n\tau$	$(-1)^n\vartheta_0$	$(-1)^{m+n}.\vartheta_1$	$(-1)^m.\vartheta_2$	ϑ_3	$e^{-n(2v+n\tau)\pi i}$
$m - \frac{1}{2} + n\tau$	ϑ_3	$(-1)^{m+1}.\vartheta_2$	$(-1)^{m+n}.\vartheta_1$	$(-1)^n.\vartheta_0$	
$m + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau$	$(-1)^n.i.\vartheta_1$	$(-1)^{m+n}.i.\vartheta_0$	$(-1)^m.\vartheta_3$	ϑ_2	$e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[2v+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right]\pi i}$
$m - \frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau$	ϑ_2	$(-1)^{m+1}.\vartheta_3$	$(-1)^{m+n}.i.\vartheta_0$	$(-1)^n.i.\vartheta_1$	

Auf Grund dieser Tabelle ist es dann leicht, die Nullpunkte der einzelnen Functionen anzugeben. Dieselben lauten

$$\text{für } \vartheta_0(v):\ v = m + \frac{2n+1}{2}\tau,$$

$$\text{„}\ \vartheta_1(v):\ v = m + n\tau,$$

$$\text{„}\ \vartheta_2(v):\ v = \frac{2m+1}{2} + n\tau,$$

$$\text{„}\ \vartheta_3(v):\ v = \frac{2m+1}{2} + \frac{2n+1}{2}\tau.$$

Ferner ist es auf Grund dieser Untersuchungen nicht schwer, für die vier Thetafunctionen noch andere analytische Darstellungen an-

zugeben. Zunächst folgt aus den ursprünglichen Definitionsgleichungen unmittelbar, dass wir die vier Thetafunctionen in der Form von Cosinus- resp. Sinusreihen darstellen können. Dieselben lauten, wie kaum auseinandergesetzt zu werden braucht:

8) $$\vartheta_3(v) = 1 + 2\sum_1^{\infty}{}^n q^{n^2}.\cos 2n\pi v,$$

9) $$\vartheta_0(v) = 1 + 2\sum_1^{\infty}{}^n (-1)^n q^{n^2}.\cos 2n\pi v,$$

10) $$\vartheta_2(v) = 2\sum_0^{\infty}{}^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\pi v,$$

11) $$\vartheta_1(v) = 2\sum_0^{\infty}{}^n (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)\pi v.$$

Für die Nullwerthe der Argumente ergeben sich hieraus die Formeln:

12) $$\vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots 2q^{n^2} + \cdots,$$

13) $$\vartheta_0 = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots (-1)^n 2q^{n^2} + \cdots,$$

14) $$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots 2q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} + \cdots,$$

wobei wir gesetzt haben:

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau), \quad \alpha = 3, 0, 2.$$

Ausser diesen Darstellungen können noch Productentwickelungen gegeben werden. In der That, wir fanden für $\vartheta_1(v)$ die Darstellung:

15) $$\vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v\,\Pi(1 - q^{2n})\,\Pi(1 - q^{2n}e^{2\pi iv})\,(1 - q^{2n}e^{-2\pi iv}).$$

Durch die angegebene Vermehrung von v um Vielfache halber Perioden können hieraus die entsprechenden Formeln für die drei anderen Thetafunctionen unmittelbar entwickelt werden. Wir erhalten die Darstellungen:

16) $$\vartheta_2(v) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\,\Pi(1 - q^{2n})\,\Pi(1 + q^{2n}e^{2\pi iv})\,(1 + q^{2n}e^{-2\pi iv}),$$

17) $$\vartheta_0(v) = \Pi(1 - q^{2n})\,\Pi(1 - q^{2n-1}e^{2\pi iv})\,(1 - q^{2n-1}e^{-2\pi iv}),$$

18) $$\vartheta_3(v) = \Pi(1 - q^{2n})\,\Pi(1 + q^{2n-1}e^{2\pi iv})\,(1 + q^{2n-1}e^{-2\pi iv}).$$

Aus diesen Formeln ergeben sich unmittelbar die folgenden:

19) $$\vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v\,\Pi(1 - q^{2n})\,\Pi(1 - 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}),$$

20) $$\vartheta_2(v) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\,\Pi(1 - q^{2n})\,\Pi(1 + 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}),$$

21) $$\vartheta_0(v) = \Pi(1 - q^{2n})\,\Pi(1 - 2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}),$$

22) $$\vartheta_3(v) = \Pi(1 - q^{2n})\,\Pi(1 + 2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}).$$

Unter Einführung von Functionen, die sich in neuester Zeit für die Theorie der elliptischen Transcendenten von Bedeutung gezeigt haben, erhalten wir für die Nullwerthe der Argumente die Beziehungen:

$$\vartheta_3 = \eta(\tau) f(\tau)^2, \tag{23}$$

$$\vartheta_0 = \eta(\tau) f_1(\tau)^2, \tag{24}$$

$$\vartheta_2 = \eta(\tau) f_2(\tau)^2, \tag{25}$$

wobei die neuen Functionen auf den rechten Seiten unserer Gleichungen folgendermassen definirt sind:

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{12}} \Pi(1 - q^{2n}), \tag{26}$$

$$f(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \Pi(1 + q^{2n-1}), \tag{27}$$

$$f_1(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \Pi(1 - q^{2n-1}), \tag{28}$$

$$f_2(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \Pi(1 + q^{2n}). \tag{29}$$

Endlich fanden wir für $\vartheta_1(v)$ eine Entwickelung in der Form eines unendlichen Doppelproductes und zwar:

$$\vartheta_1(v) = \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3 \pi v \prod_{-\nu}^{+\nu}{}_n \prod_{-\mu}^{+\mu}{}_m \left(1 - \frac{v}{m + n\tau}\right) \tag{30}$$

für $\nu = \infty$ und $\mu = \infty$, wobei der Fall $n = 0$, $m = 0$ auszuschliessen und das Product in bestimmter Weise zu nehmen ist.

Ganz analog ergeben sich die Formeln:

$$\vartheta_2(v) = \vartheta_2 \prod_{-\nu}^{+\nu}{}_n \prod_{-\mu}^{+\mu}{}_m \left(1 - \frac{v}{m + \frac{1}{2} + n\tau}\right), \tag{31}$$

$$\vartheta_0(v) = \vartheta_0 \prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}_n \prod_{-\mu}^{+\mu}{}_m \left(1 - \frac{v}{m + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}\right), \tag{32}$$

$$\vartheta_3(v) = \vartheta_3 \prod_{-\nu-1}^{+\nu}{}_n \prod_{-\mu-1}^{+\mu}{}_m \left(1 - \frac{v}{m + \frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau}\right). \tag{33}$$

In Bezug auf die Ausführung dieser Producte gelten dann ähnliche Bemerkungen, wie bei dem Doppelproduct für $\vartheta_1(v)$.

§ 23.[8])

Die linearen Relationen zwischen den Quadraten der vier eingeführten Thetafunctionen.

Das Quadrat einer jeden der im vorigen Paragraphen eingeführten Thetafunctionen erster Ordnung ist, wie man sich unmittelbar über-

zeugt, eine Thetafunction zweiter Ordnung mit der Charakteristik (0,0). In Folge dessen müssen zwischen je dreien derselben lineare Relationen stattfinden. Es ist nicht schwer, dieselben wirklich aufzustellen. In der That, jedenfalls muss eine Relation von der Form bestehen:

$$c_1 \,.\, \vartheta_3^2(v) = c_2 \,.\, \vartheta_0^2(v) + c_3 \,.\, \vartheta_2^2(v).$$

Die drei Constanten resp. deren Verhältnisse bestimmen wir, indem wir v specielle Werthe beilegen. Setzen wir zunächst $v = \frac{1}{2}$ und benutzen die im vorigen Paragraphen aufgestellte Substitutionstabelle, so folgt:

$$c_1 \,.\, \vartheta_0^2 = c_2 \,.\, \vartheta_3^2.$$

Setzen wir zweitens $v = \frac{\tau}{2}$, so folgt:

$$c_1 \,.\, \vartheta_2^2 = c_3 \,.\, \vartheta_3^2.$$

Setzen wir die aus den beiden letzten Gleichungen bestimmten Werthe der Constanten in die erste Gleichung ein, so nimmt dieselbe die Form an:

$$1) \qquad \vartheta_3^2 \,.\, \vartheta_3^2(v) = \vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_0^2(v) + \vartheta_2^2 \,.\, \vartheta_2^2(v).$$

Setzen wir in dieser Gleichung $v = 0$, so ergiebt sich die wichtige Relation, von welcher wir häufig Gebrauch machen werden:

$$2) \qquad \vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4.$$

Wir können hieraus die weitere Constantenrelation ableiten:

$$3) \qquad f(\tau)^8 = f_1(\tau)^8 + f_2(\tau)^8.$$

Die drei anderen linearen Relationen zwischen den Quadraten von je drei Thetafunctionen können entweder genau so wie die soeben aufgestellte direct entwickelt oder aber aus der schon gefundenen durch Vermehrung von v um halbe Perioden abgeleitet werden. Es ergeben sich dann die Formeln:

$$4) \qquad \vartheta_3^2 \,.\, \vartheta_0^2(v) = \vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_3^2(v) + \vartheta_2^2 \,.\, \vartheta_1^2(v),$$

$$5) \qquad \vartheta_3^2 \,.\, \vartheta_1^2(v) = -\vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_2^2(v) + \vartheta_2^2 \,.\, \vartheta_0^2(v),$$

$$6) \qquad \vartheta_3^2 \,.\, \vartheta_2^2(v) = -\vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_1^2(v) + \vartheta_2^2 \,.\, \vartheta_3^2(v).$$

Jedenfalls folgt also, dass wir die Quadrate aller vier Thetafunctionen linear durch die Quadrate von zwei beliebig gewählten derselben darstellen können. Wählen wir hierzu die Functionen $\vartheta_0^2(v)$ und $\vartheta_1^2(v)$, so ergeben sich die Resultate, die wir aus den früheren unmittelbar hinschreiben können:

$$\vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_3^2(v) = \vartheta_3^2 \,.\, \vartheta_0^2(v) - \vartheta_2^2 \,.\, \vartheta_1^2(v),$$

$$\vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_2^2(v) = \vartheta_2^2 \,.\, \vartheta_0^2(v) - \vartheta_3^2 \,.\, \vartheta_1^2(v).$$

§ 24.

Das Additionstheorem der Thetafunctionen. Specielle Form.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dass das Quadrat einer jeden der vier Thetafunctionen eine Thetafunction zweiter Ordnung mit der Charakteristik (0, 0) ist. Derartige Functionen können aber noch auf mannigfachem anderen Wege gebildet werden. Setzen wir z. B.

$$1)\qquad f(v) = \vartheta_3(v+w)\,\vartheta_3(v-w),$$

wo v und w beliebige Argumente bedeuten, so genügt $f(v)$ als Function von v angesehen den beiden Gleichungen:

$$f(v+1) = f(v),$$
$$f(v+\tau) = e^{-2\pi i(2v+\tau)} f(v),$$

ist also, da es eine ganze transcendente Function ist, eine Thetafunction zweiter Ordnung von v mit der Charakteristik (0, 0). Als solche lässt sie sich linear durch die Quadrate von je zwei der ursprünglichen Thetafunctionen ausdrücken. Es giebt das sechs Ausdrucksformen. Von diesen greifen wir eine heraus:

$$\vartheta_3(v+w)\,\vartheta_3(v-w) = c_1 \,.\, \vartheta_3^2(v) + c_2\,\vartheta_1^2(v).$$

Setzen wir $v = 0$, so ergiebt sich:

$$c_1 = \frac{\vartheta_3^2(w)}{\vartheta_3^2},$$

setzen wir $v = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, so wird:

$$c_2 = \frac{\vartheta_1^2(w)}{\vartheta_3^2},$$

sodass wir die Formel erhalten:

$$\vartheta_3^2 \,.\, \vartheta_3(v+w)\,\vartheta_3(v-w) = \vartheta_3^2(w)\,\vartheta_3^2(v) + \vartheta_1^2(w)\,.\,\vartheta_1^2(v).$$

In ähnlicher Weise ergeben sich fünf andere Darstellungsweisen desselben Productes $\vartheta_3(v+w)\,\vartheta_3(v-w)$. Dieselben lauten, wie kaum näher auseinandergesetzt zu werden braucht:

$$2)\quad \begin{cases} \vartheta_3^2\vartheta_3(v+w)\,\vartheta_3(v-w) = \vartheta_0^2(w)\,\vartheta_0^2(v) + \vartheta_2^2(w)\,\vartheta_2^2(v), \\ \vartheta_0^2\vartheta_3(v+w)\,\vartheta_3(v-w) = \vartheta_3^2(w)\,\vartheta_0^2(v) - \vartheta_2^2(w)\,\vartheta_1^2(v), \\ \vartheta_0^2\vartheta_3(v+w)\,\vartheta_3(v-w) = \vartheta_0^2(w)\,\vartheta_3^2(v) - \vartheta_1^2(w)\,\vartheta_2^2(v), \\ \vartheta_2^2\vartheta_3(v+w)\,\vartheta_3(v-w) = \vartheta_2^2(w)\,\vartheta_3^2(v) + \vartheta_1^2(w)\,\vartheta_0^2(v), \\ \vartheta_2^2\vartheta_3(v+w)\,\vartheta_3(v-w) = \vartheta_3^2(w)\,\vartheta_2^2(v) + \vartheta_0^2(w)\,\vartheta_1^2(v). \end{cases}$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich hieraus die entsprechenden Formeln für die Producte, in denen an Stelle des Index 3 der Index 2, 1, 0 tritt. Dieselben lauten:

$$\vartheta_3^2 . \vartheta_2(v+w)\vartheta_2(v-w) = \vartheta_3^2(w)\vartheta_2^2(v) - \vartheta_1^2(w)\vartheta_0^2(v)$$
$$= \vartheta_2^2(w)\vartheta_3^2(v) - \vartheta_0^2(w)\vartheta_1^2(v),$$
$$\vartheta_0^2 . \vartheta_2(v+w)\vartheta_2(v-w) = \vartheta_2^2(w)\vartheta_0^2(v) - \vartheta_3^2(w)\vartheta_1^2(v)$$
$$= \vartheta_0^2(w)\vartheta_2^2(v) - \vartheta_1^2(w)\vartheta_3^2(v),$$
$$\vartheta_2^2 . \vartheta_2(v+w)\vartheta_2(v-w) = \vartheta_2^2(w)\vartheta_2^2(v) - \vartheta_1^2(w)\vartheta_1^2(v)$$
$$= \vartheta_3^2(w)\vartheta_3^2(v) - \vartheta_0^2(w)\vartheta_0^2(v),$$
$$\vartheta_3^2 . \vartheta_1(v+w)\vartheta_1(v-w) = \vartheta_3^2(w)\vartheta_1^2(v) - \vartheta_1^2(w)\vartheta_3^2(v)$$
$$= \vartheta_2^2(w)\vartheta_0^2(v) - \vartheta_0^2(w)\vartheta_2^2(v),$$
$$\vartheta_0^2 . \vartheta_1(v+w)\vartheta_1(v-w) = \vartheta_2^2(w)\vartheta_3^2(v) - \vartheta_3^2(w)\vartheta_2^2(v)$$
$$= \vartheta_0^2(w)\vartheta_1^2(v) - \vartheta_1^2(w)\vartheta_0^2(v),$$
$$\vartheta_2^2 . \vartheta_1(v+w)\vartheta_1(v-w) = \vartheta_2^2(w)\vartheta_1^2(v) - \vartheta_1^2(w)\vartheta_2^2(v)$$
$$= \vartheta_3^2(w)\vartheta_0^2(v) - \vartheta_0^2(w)\vartheta_3^2(v),$$
$$\vartheta_3^2 . \vartheta_0(v+w)\vartheta_0(v-w) = \vartheta_3^2(w)\vartheta_0^2(v) + \vartheta_1^2(w)\vartheta_2^2(v)$$
$$= \vartheta_0^2(w)\vartheta_3^2(v) + \vartheta_2^2(w)\vartheta_1^2(v),$$
$$\vartheta_0^2 . \vartheta_0(v+w)\vartheta_0(v-w) = \vartheta_3^2(w)\vartheta_3^2(v) - \vartheta_2^2(w)\vartheta_2^2(v)$$
$$= \vartheta_0^2(w)\vartheta_0^2(v) - \vartheta_1^2(w)\vartheta_1^2(v),$$
$$\vartheta_2^2 . \vartheta_0(v+w)\vartheta_0(v-w) = \vartheta_2^2(w)\vartheta_0^2(v) + \vartheta_1^2(w)\vartheta_3^2(v)$$
$$= \vartheta_3^2(w)\vartheta_1^2(v) + \vartheta_0^2(w)\vartheta_2^2(v).$$

Es sind dieses die 24 möglichen Darstellungen der Producte:

$$\vartheta_\alpha(v+w)\vartheta_\alpha(v-w)$$

durch die Quadrate der gewöhnlichen Thetafunctionen.

In diesen Producten haben die Indices den nämlichen Werth. Es liegt nun nahe, auch diejenigen Producte zu behandeln, in denen die Indices zwei verschiedene Werthe besitzen.

Nehmen wir dazu die Function:

$$3)\qquad f(v) = \vartheta_0(v+w)\vartheta_2(v-w),$$

und sehen dieselbe als Function von v allein an, während w ein veränderlicher Parameter ist, so leistet dieselbe als solche den Gleichungen Genüge:

$$f(v+1) = -f(v),$$
$$f(v+\tau) = -e^{-2\pi i(2v+\tau)}f(v).$$

Wir haben also eine Thetafunction zweiter Ordnung mit der Charakteristik $(1, 1)$ vor uns. Es ist nicht schwer, mit Hülfe der gewöhnlichen Thetafunctionen ebensolche Functionen zu bilden. In der That, die beiden Producte:

$$\vartheta_0(v)\vartheta_2(v) \quad \text{und} \quad \vartheta_1(v)\vartheta_3(v)$$

leisten genau denselben Bedingungsgleichungen Genüge, überdies sind sie, wie man ebenso einfach einsieht, linear von einander unabhängig.

Hieraus folgt, dass wir den Ansatz machen können:

$$\vartheta_0(v+w)\,\vartheta_2(v-w) = c_1\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_2(v) + c_2\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v).$$

Die Constanten bestimmen wir, indem wir einmal $v=0$, dann $v=\frac{\tau}{2}$ setzen. Auf diesem Wege erhalten wir die Resultate:

$$\vartheta_0\,.\,\vartheta_2\,.\,c_1 = \vartheta_0(w)\,\vartheta_2(w),\quad \vartheta_0\,.\,\vartheta_2\,.\,c_2 = \vartheta_1(w)\,.\,\vartheta_3(w).$$

Analog hätten wir das Product untersuchen können:

$$\vartheta_0(v-w)\,\vartheta_2(v+w).$$

Wir fassen die Resultate in der folgenden Formel zusammen:

$$4)\qquad \vartheta_0\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_0(v\pm w)\,\vartheta_2(v\mp w) = \vartheta_0(w)\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_2(v) \pm \vartheta_1(w)\,\vartheta_3(w)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v).$$

Derartige Formeln können noch fünf weitere hergeleitet werden, theilweise durch Substitution halber Perioden, theilweise auf directem Wege. Da keinerlei Schwierigkeiten irgend welcher Art auftreten, können wir die fertigen Formeln hinschreiben:

$$5)\quad \begin{cases} \vartheta_3.\vartheta_2.\vartheta_2(v\pm w)\,\vartheta_2(v\mp w) = \vartheta_3(w)\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_2(v) \pm \vartheta_0(w)\,\vartheta_1(w)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_1(v),\\ \vartheta_0.\vartheta_3.\vartheta_0(v\pm w)\,\vartheta_3(v\mp w) = \vartheta_0(w)\,\vartheta_3(w)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v) \pm \vartheta_1(w)\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v),\\ \vartheta_0.\vartheta_2.\vartheta_1(v\pm w)\,\vartheta_3(v\mp w) = \vartheta_0(w)\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v) \pm \vartheta_1(w)\,\vartheta_3(w)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_2(v),\\ \vartheta_3.\vartheta_2.\vartheta_1(v\pm w)\,\vartheta_0(v\mp w) = \vartheta_3(w)\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_1(v) \pm \vartheta_0(w)\,\vartheta_1(w)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_2(v),\\ \vartheta_0.\vartheta_3.\vartheta_1(v\pm w)\,\vartheta_2(v\mp w) = \vartheta_0(w)\,\vartheta_3(w)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v) \pm \vartheta_1(w)\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v). \end{cases}$$

Hiermit ist auch diese Kategorie von Formeln erschöpft. Man überzeugt sich leicht, dass keine weiteren analog gebauten möglich sind.

§ 25.

Verallgemeinerung der Resultate des vorigen Paragraphen.

Den Betrachtungen des vorigen Paragraphen waren zunächst Ausdrücke von der Form zu Grunde gelegt worden:

$$\vartheta_\alpha(v+w)\,\vartheta_\alpha(v-w).$$

Wir wollen jetzt das Problem verallgemeinern und Ausdrücke von der Form betrachten:

$$\vartheta_\alpha(v+u)\,\vartheta_\alpha(v+w).$$

Um diese Grössen zu behandeln, setzen wir:

$$1)\qquad f(v) = \vartheta_0(v+u)\,\vartheta_0(v+w)$$

und sehen denselben zunächst als Function von v allein an, während u und w Parameter sind. Dann leistet derselbe den beiden Gleichungen Genüge:

$$f(v+1) = f(v),$$
$$f(v+\tau) = e^{-2\pi i(2v+\tau)-2\pi i(u+w)}f(v).$$

Da $f(v)$ überdies eine ganze transcendente Function ist, so können wir auf dieselbe das Hermite'sche Theorem anwenden d. h. die Function $f(v)$ linear durch zwei andere Functionen darstellen, die linear von einander unabhängig sind und denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Derartige Functionen sind aber leicht zu bilden. Es sind das z. B. die Ausdrücke, die linear von einander unabhängig sind:

$$\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v+u+w) \quad \text{und} \quad \vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v+u+w).$$

Hieraus folgt, dass wir den Ansatz machen können:

$$\vartheta_0(v+u)\,\vartheta_0(v+w) = c_1\,.\,\vartheta_3(v)\,.\,\vartheta_3(v+u+w) + c_2\,.\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v+u+w).$$

Die Constanten bestimmen wir wieder, indem wir v bestimmte Werthe beilegen, etwa $v = \frac{1}{2}$ und $v = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}$.

Dann erhalten wir die Formel:

$$2)\quad \vartheta_0\,.\,\vartheta_0(u+w)\,\vartheta_0(v+u)\,\vartheta_0(w+v) = \vartheta_3(v+u+w)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(u)\,\vartheta_3(w) - \vartheta_2(v+u+w)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(u)\,\vartheta_2(w).$$

Dieselbe enthält einen Theil der Formeln des vorigen Paragraphen als specielle Fälle in sich. In der That, setzen wir:

$$u = -w,$$

so erhalten wir die Formel:

$$\vartheta_0^2\,.\,\vartheta_0(v+w)\,\vartheta_0(v-w) = \vartheta_3^2(v)\,\vartheta_3^2(w) - \vartheta_2^2(v)\,\vartheta_2^2(w),$$

die schon früher entwickelt war. Ueberdies erhalten wir einige weitere schon entwickelte Formeln, wenn wir setzen:

$$u = -w + \frac{1}{2},$$

$$u = -w - \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2},$$

$$u = -w + \frac{\tau}{2},$$

wie kaum näher auseinandergesetzt zu werden braucht.

Dasselbe Product

$$\vartheta_0(v+u)\,\vartheta_0(v+w)$$

hätte nun noch auf mannigfachem anderen Wege dargestellt werden können, da wir ja zwei beliebige der vier Grössen:

$$\vartheta_\alpha(v+u+w)\,\vartheta_\alpha(v)$$

hätten wählen können. Wir würden dann im Ganzen sechs verschiedene Darstellungen erhalten, die die entsprechenden Formeln des vorigen Paragraphen als specielle Fälle in sich schliessen. Von der Aufstellung

derselben möge abgesehen werden. In genau derselben Weise ist dann ferner ein jedes andere Product zu betrachten:

$$\vartheta_\alpha(v+u)\,\vartheta_2(v+w).$$

Wir begnügen uns damit, für ein jedes eine Darstellung zu geben, die der entwickelten für

$$\vartheta_0(v+u)\,\vartheta_0(v+w)$$

analog ist. Die Formeln lauten:

$$3)\quad \begin{cases} \vartheta_0\cdot\vartheta_0(u+w)\,\vartheta_3(v+u)\,\vartheta_3(v+w) = \vartheta_0(v+u+w)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(u)\,\vartheta_3(w) \\ \qquad\qquad - \vartheta_1(v+u+w)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(u)\,\vartheta_2(w), \\ \vartheta_0\cdot\vartheta_0(u+w)\,\vartheta_2(v+u)\,\vartheta_2(v+w) = \vartheta_0(v+u+w)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_2(u)\,\vartheta_2(w) \\ \qquad\qquad - \vartheta_1(v+u+w)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(u)\,\vartheta_3(w), \\ \vartheta_0\cdot\vartheta_0(u+w)\,\vartheta_1(v+u)\,\vartheta_1(v+w) = \vartheta_3(v+u+w)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_2(u)\,\vartheta_2(w) \\ \qquad\qquad - \vartheta_2(v+u+w)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(u)\,\vartheta_3(w). \end{cases}$$

§ 26.

Das Additionstheorem. Allgemeine Form.

Die Resultate der beiden vorigen Paragraphen können noch wesentlich verallgemeinert werden. In der That, wir wollen dazu zwei Reihen von Argumenten einführen u, v, w, t und u', v', w', t', die mit einander durch die Formeln verbunden sind:

$$\begin{aligned} 2u' &= u+v+w+t, & u &= \tfrac{1}{2}(u'+v'+w'+t'), \\ 2v' &= u+v-w-t, & v &= \tfrac{1}{2}(u'+v'-w'-t'), \\ 2w' &= u-v+w-t, & w &= \tfrac{1}{2}(u'-v'+w'-t'), \\ 2t' &= u-v-w+t, & t &= \tfrac{1}{2}(u'-v'-w'+t'). \end{aligned}$$

Bilden wir dann das Product:

$$\vartheta_3(u')\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(w')\,\vartheta_3(t'),$$

so ist dieses in Bezug auf eine jede der vier Grössen u', v', w', t' eine Thetafunction erster Ordnung.

Bilden wir andrerseits das Product:

$$\vartheta_3(u)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(t),$$

so können wir dieses als Function der Grössen u', v', w', t' ansehen. Sehen wir es für den Augenblick als allein abhängig von u' an und bezeichnen es durch:

$$f(u') = \vartheta_3(u)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(t),$$

so ist:

$$f(u'+1) = \vartheta_0(u)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_0(w)\,\vartheta_0(t).$$

Unter solchen Umständen bleibt die Function:

$$\varphi(u') = \vartheta_3(u)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(t) + \vartheta_0(u)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_0(w)\,\vartheta_0(t)$$

ungeändert, wenn wir u' um 1 vermehren.

Ferner ist:

$$\varphi(u'+\tau) = e^{-\pi i(2u'+\tau)}[\vartheta_2(u)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(t) + \vartheta_1(u)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(t)].$$

Hieraus folgt, dass die Function:

$$\Sigma\vartheta_\alpha(u)\,\vartheta_\alpha(v)\,\vartheta_\alpha(w)\,\vartheta_\alpha(t),$$

in welcher die Summe nach α über 0, 1, 2, 3 zu erstrecken ist, aufgefasst als Function von u' allein eine Thetafunction erster Ordnung mit der Charakteristik (0, 0) ist. Genau dasselbe folgt, wenn wir den Ausdruck als von v', w', t' allein abhängig ansehen. Hieraus folgt dann:

$$\vartheta_3(u')\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(w')\,\vartheta_3(t') = c\,\Sigma\vartheta_\alpha(u)\,\vartheta_\alpha(v)\,\vartheta_\alpha(w)\,\vartheta_\alpha(t),$$

wobei c eine Grösse ist, die jedenfalls von den Argumenten u, v, w, t und damit auch u', v', w', t' unabhängig ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass c auch sicherlich von τ unabhängig sein muss. In der That, bezeichnen wir die linke Seite unserer letzten Gleichung kurz durch $F(u', v', w', t')$, die rechte kurz durch $F_1(u, v, w, t)$, so folgt unmittelbar:

$$\sum \frac{\partial^2 F(u', v', w', t')}{\partial u'^2} = \sum \frac{\partial^2 F_1(u, v, w, t)}{\partial u^2},$$

wobei die Summe links nach u', v', w', t', rechts nach u, v, w, t zu nehmen ist. Berücksichtigen wir also die Differentialgleichung, welcher die Thetafunctionen Genüge leisten, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_3(u')\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(w')\,\vartheta_3(t') = c\frac{\partial}{\partial\tau}\Sigma\vartheta_\alpha(u)\,\vartheta_\alpha(v)\,\vartheta_\alpha(w)\,\vartheta_\alpha(t).$$

Hieraus folgt dann unmittelbar, dass c auch von τ unabhängig sein muss. Dann aber ist der Werth von c unmittelbar bestimmt, wenn wir die trigonometrischen Ausdrücke für die einzelnen Thetafunctionen in unsere Gleichung einführen.

Es ergiebt sich:

$$c = \frac{1}{2}$$

oder also wir erhalten die Formel:

$$1)\qquad 2\vartheta_3(u')\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(w')\,\vartheta_3(t') = \Sigma\vartheta_\alpha(u)\,\vartheta_\alpha(v)\,\vartheta_\alpha(w)\,\vartheta_\alpha(t).$$

Genau so würde folgen:

$$2)\qquad 2\vartheta_2(u')\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_2(w')\,\vartheta_2(t') = \Sigma_\beta\vartheta_\beta(u)\,\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\beta(w)\,\vartheta_\beta(t) - \Sigma_\gamma\vartheta_\gamma(u)\,\vartheta_\gamma(v)\,\vartheta_\gamma(w)\,\vartheta_\gamma(t),$$

wobei die Summe nach β zu erstrecken ist über 3, 2 nach γ über 0, 1.

Die beiden Gleichungen ergeben durch Addition resp. durch Subtraction und Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben die symmetrisch gebauten Formeln:

$$3)\quad \begin{cases} \vartheta_3(u')\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(w')\,\vartheta_3(t') + \vartheta_2(u')\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_2(w')\,\vartheta_2(t') \\ = \vartheta_3(u)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(t) + \vartheta_2(u)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(t), \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} \vartheta_0(u')\,\vartheta_0(v')\,\vartheta_0(w')\,\vartheta_0(t') + \vartheta_1(u')\,\vartheta_1(v')\,\vartheta_1(w')\,\vartheta_1(t') \\ = \vartheta_3(u)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(t) - \vartheta_2(u)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(t). \end{cases}$$

Es können nun noch eine Anzahl ähnlicher Gleichungen aufgestellt werden, indem man ganz allgemein die Function zu Grunde legt:

$$\vartheta_\alpha(u')\,\vartheta_\beta(v')\,\vartheta_\gamma(w')\,\vartheta_\delta(t').$$

Ein jeder Fall kann genau wie der obige behandelt werden. Wir beschränken uns darauf, die Resultate in der folgenden Tabelle zusammenzufassen:

$$5)\quad \begin{cases} \vartheta_3(u')\vartheta_3(v')\vartheta_3(w')\vartheta_3(t') - \vartheta_2(u')\vartheta_2(v')\vartheta_2(w')\vartheta_2(t') = \vartheta_0(u)\vartheta_0(v)\vartheta_0(w)\vartheta_0(t) \\ \qquad + \vartheta_1(u)\vartheta_1(v)\vartheta_1(w)\vartheta_1(t), \\ \vartheta_0(u')\vartheta_0(v')\vartheta_0(w')\vartheta_0(t') - \vartheta_1(u')\vartheta_1(v')\vartheta_1(w')\vartheta_1(t') = \vartheta_0(u)\vartheta_0(v)\vartheta_0(w)\vartheta_0(t) \\ \qquad - \vartheta_1(u)\vartheta_1(v)\vartheta_1(w)\vartheta_1(t), \\ \vartheta_0(u')\vartheta_0(v')\vartheta_3(w')\vartheta_3(t') + \vartheta_1(u')\vartheta_1(v')\vartheta_2(w')\vartheta_2(t') = \vartheta_0(u)\vartheta_0(v)\vartheta_3(w)\vartheta_3(t) \\ \qquad + \vartheta_1(u)\vartheta_1(v)\vartheta_2(w)\vartheta_2(t), \\ \vartheta_3(u')\vartheta_3(v')\vartheta_0(w')\vartheta_0(t') + \vartheta_2(u')\vartheta_2(v')\vartheta_1(w')\vartheta_1(t') = \vartheta_0(u)\vartheta_0(v)\vartheta_3(w)\vartheta_3(t) \\ \qquad - \vartheta_1(u)\vartheta_1(v)\vartheta_2(w)\vartheta_2(t), \\ \vartheta_0(u')\vartheta_0(v')\vartheta_2(w')\vartheta_2(t') + \vartheta_1(u')\vartheta_1(v')\vartheta_3(w')\vartheta_3(t') = \vartheta_0(u)\vartheta_0(v)\vartheta_2(w)\vartheta_2(t) \\ \qquad + \vartheta_1(u)\vartheta_1(v)\vartheta_3(w)\vartheta_3(t), \\ \vartheta_2(u')\vartheta_2(v')\vartheta_0(w')\vartheta_0(t') + \vartheta_3(u')\vartheta_3(v')\vartheta_1(w')\vartheta_1(t') = \vartheta_0(u)\vartheta_0(v)\vartheta_2(w)\vartheta_2(t) \\ \qquad - \vartheta_1(u)\vartheta_1(v)\vartheta_3(w)\vartheta_3(t), \\ \vartheta_3(u')\vartheta_3(v')\vartheta_2(w')\vartheta_2(t') + \vartheta_0(u')\vartheta_0(v')\vartheta_1(w')\vartheta_1(t') = \vartheta_3(u)\vartheta_3(v)\vartheta_2(w)\vartheta_2(t) \\ \qquad + \vartheta_0(u)\vartheta_0(v)\vartheta_1(w)\vartheta_1(t), \\ \vartheta_2(u')\vartheta_2(v')\vartheta_3(w')\vartheta_3(t') + \vartheta_1(u')\vartheta_1(v')\vartheta_0(w')\vartheta_0(t') = \vartheta_3(u)\vartheta_3(v)\vartheta_2(w)\vartheta_2(t) \\ \qquad - \vartheta_0(u)\vartheta_0(v)\vartheta_1(w)\vartheta_1(t), \\ \vartheta_1(u')\vartheta_0(v')\vartheta_2(w')\vartheta_3(t') - \vartheta_0(u')\vartheta_1(v')\vartheta_3(w')\vartheta_2(t') = \vartheta_3(u)\vartheta_2(v)\vartheta_0(w)\vartheta_1(t) \\ \qquad + \vartheta_2(u)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_0(t), \\ \vartheta_3(u')\vartheta_2(v')\vartheta_0(w')\vartheta_1(t') - \vartheta_2(u')\vartheta_3(v')\vartheta_1(w')\vartheta_0(t') = \vartheta_3(u)\vartheta_2(v)\vartheta_0(w)\vartheta_1(t) \\ \qquad - \vartheta_2(u)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_0(t). \end{cases}$$

Dieses sind die allgemeinsten Formeln, welche für die Thetafunctionen erster Ordnung aufgestellt werden sollen. Sie enthalten die Formeln der beiden letzten Paragraphen als specielle Fälle in sich. Es braucht das kaum näher auseinandergesetzt zu werden. Setzen wir z. B.

$$u = v + w + t, \quad u' = v + w + t, \quad v' = v, \quad w' = w, \quad t' = t,$$

so genügen diese Werthe den soeben hingeschriebenen Gleichungen. Setzen wir diese Werthe in unser Formelsystem ein, so erhalten wir ein Gleichungssystem, welches die Gleichungen des vorigen Paragraphen in sich enthält. In ähnlicher Weise kann man die Gleichungen des § 24 ableiten.

§ 27.[9])

Differentialbeziehungen der Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente.

Auf Grund der entwickelten Sätze können wir nun einige Differentialbeziehungen der Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente entwickeln, die für das Folgende von fundamentaler Bedeutung sind.

Wir gehen dazu von der Formel aus:

$$1) \qquad \vartheta_2 . \vartheta_3 . \vartheta_1(v+w) . \vartheta_0(v-w) = \vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_2(w)\,\vartheta_3(w) + \vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_0(w)\,\vartheta_1(w)$$

und entwickeln beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von w, indem wir von den Formeln Gebrauch machen:

$$\vartheta_1(v+w) = \vartheta_1(v) + w\,\vartheta'_1(v) + \frac{w^2}{1.2}\,\vartheta''_1(v) + \cdots,$$

$$\vartheta_0(v-w) = \vartheta_0(v) - w\,\vartheta'_0(v) + \frac{w^2}{1.2}\,\vartheta''_0(v) + \cdots,$$

$$\vartheta_\alpha(w) = \vartheta_\alpha + \frac{w^2}{1.2}\,\vartheta''_\alpha + \cdots, \qquad \alpha = 0, 2, 3,$$

$$\vartheta_1(w) = w\,\vartheta'_1 + \frac{w^3}{3!}\,\vartheta'''_1 + \cdots$$

Es liefert dann die Gleichsetzung der Coefficienten der ersten Potenzen von w die Gleichung:

$$\vartheta_2 . \vartheta_3[\vartheta_0(v)\,\vartheta'_1(v) - \vartheta_1(v)\,\vartheta'_0(v)] = \vartheta_0 . \vartheta'_1 . \vartheta_2(v) . \vartheta_3(v).$$

Entwickelt man die linke und rechte Seite dieser Gleichung in analoger Weise nach Potenzen von v, so giebt die Gleichsetzung der Coefficienten von v^2 links und rechts die Gleichung:

$$\vartheta_2 . \vartheta_3(\vartheta_0\vartheta'''_1 - \vartheta'_1 . \vartheta''_0) = \vartheta_0 . \vartheta'_1(\vartheta_2 . \vartheta''_3 + \vartheta_3 . \vartheta''_2)$$

oder also:

$$\frac{\vartheta'''_1}{\vartheta'_1} = \frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} + \frac{\vartheta''_2}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta''_3}{\vartheta_3}.$$

Andrerseits ist aber:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_\alpha(v)}{\partial \tau},$$

also folgt für die Nullwerthe der Argumente:

$$\vartheta''_\alpha = 4\pi i \frac{d\vartheta_\alpha}{d\tau},$$

wenn α einer der Indices 0, 2, 3 ist. Ist jedoch $\alpha = 1$, so machen wir von den Formeln Gebrauch:

$$\vartheta_1(v) = \frac{v}{1}\vartheta'_1 + \frac{v^3}{3!}\vartheta'''_1 + \cdots,$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1(v)}{\partial v^2} = \frac{v}{1}\cdot\vartheta'''_1 + \cdots,$$

$$\frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial \tau} = v\frac{d\vartheta'_1}{d\tau} + \cdots$$

und erhalten:

$$\vartheta_1''' = 4\pi i \frac{d\vartheta'_1}{d\tau}.$$

Unter Benutzung dieser Beziehungen nimmt die Differentialbeziehung, welche wir vorhin für die Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente gefunden haben, die Form an:

$$\frac{d\vartheta'_1}{d\tau} : \vartheta'_1 = \sum\nolimits_\alpha \frac{d\vartheta_\alpha}{d\tau} : \vartheta_\alpha \qquad \alpha = 0, 2, 3$$

oder also, indem wir nach τ integriren:

$$\vartheta'_1 = c\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_3,$$

wobei c eine von τ unabhängige Constante bedeutet. Dieselbe bestimmen wir, indem wir die Entwickelungen der einzelnen Functionen links und rechts nach q-Reihen einsetzen. Es sind dieselben bekanntlich:

$$\vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4 + \cdots,$$

$$\vartheta_0 = 1 - 2q + 2q^4 \ldots,$$

$$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + \cdots,$$

$$\vartheta'_1 = 2\pi q^{\frac{1}{4}} - 2\,.\,3\,.\,\pi q^{\frac{9}{4}} \ldots$$

Die Vergleichung der Anfangsglieder der Entwickelung ergiebt dann den Werth:

$$c = \pi$$

oder also wir erhalten die wichtige Differentialbeziehung:

$$\text{2)} \qquad \vartheta_1' = \pi\,.\,\vartheta_0\,.\,\vartheta_2\,.\,\vartheta_3.$$

Dieselbe wird in der Folge häufig gebraucht werden.

Aus der Productentwickelung für die ϑ_1-Function ergiebt sich ferner unmittelbar:

$$\vartheta'_1 = 2\pi q^{\frac{1}{4}} \Pi (1 - q^{2n})^3$$

oder also, wenn wir unsere früher eingeführten Bezeichnungen aufnehmen:

$$\vartheta'_1 = 2\pi \eta(\tau)^3.$$

Dann kann unsere Differentialbeziehung auch in die Form gebracht werden:

3) $$f(\tau) f_1(\tau) f_2(\tau) = \sqrt{2}.$$

§ 28.[10])

Die Darstellung der Thetafunctionen n^{ter} Ordnung durch die Thetafunctionen erster Ordnung.

Wir haben im Früheren gezeigt, dass es höchstens n linear von einander unabhängige Thetafunctionen n^{ter} Ordnung mit derselben Charakteristik giebt und zwar, indem wir dieselben durch gewisse unendliche Reihen darstellten. Es soll nun gezeigt werden, dass wir dasselbe mit Hülfe der gewöhnlichen vier Thetafunctionen zu leisten im Stande sind. Dazu wollen wir aber zunächst den folgenden ergänzenden Lehrsatz zu dem Hermite'schen Theorem beweisen.

Lehrsatz: Für ein gerades n existiren höchstens $\frac{n}{2}$ gerade und $\frac{n}{2}$ ungerade linear unabhängige Thetafunctionen n^{ter} Ordnung mit Ausnahme der Charakteristik (0, 0), für welche die Anzahl der linear unabhängigen geraden Thetafunctionen höchstens $\frac{n}{2} + 1$, die der ungeraden $\frac{n}{2} - 1$ beträgt. Bei ungeradem n und gerader Charakteristik giebt es höchstens $\frac{n+1}{2}$ gerade, $\frac{1}{2}(n-1)$ ungerade, bei ungeradem n und ungerader Charakteristik $\frac{1}{2}(n+1)$ ungerade und $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade linear unabhängige Thetafunctionen.

Bei dem Beweise dieses Satzes beschränken wir uns auf einen Fall. Wir nehmen an, dass n eine ungerade Zahl sei, ferner die Charakteristik (0, 0). Wir wollen nun ganz allgemein eine Thetafunction n^{ter} Ordnung mit der Charakteristik (g, h) bezeichnen durch:

$$\theta_{gh}^{(n)}(v);$$

dann fanden wir:

$$\theta_{00}^{(n)}(v) = \Sigma c_r . e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{n}} . e^{2 n i r \pi},$$

wobei die Beziehungen bestanden:

$$c_r = c_{r-n}.$$

Wir wollen nun die Annahme hinzufügen, dass $\theta_{00}^{(n)}(v)$ eine gerade Function von v sei, d. h. der Gleichung Genüge leiste:

$$\theta_{00}^{n}(-v) = \theta_{00}^{(n)}(v).$$

Dann folgt, dass die Grössen c der weiteren Gleichung Genüge leisten müssen:

$$c_r = c_{-r} = c_{n-r}.$$

Nun fanden wir, dass allein die Grössen $c_0, c_1 \ldots c_{n-1}$ unbestimmt sind. Aus der letzten Bedingung folgt aber:

$$c_1 = c_{n-1},$$

$$c_2 = c_{n-2},$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$c_{\frac{n-1}{2}} = c_{\frac{n+1}{2}},$$

es bleiben also lediglich die Grössen $c_0, c_1, \ldots c_{\frac{n-1}{2}}$ unbestimmt, deren Anzahl gleich $\frac{n+1}{2}$ ist.

Hiermit ist die Richtigkeit der Behauptung bewiesen und genau so kann in jedem einzelnen Falle vorgegangen werden.

Auf Grund dieses Satzes und unserer früheren Untersuchungen ist es nun nicht schwer, die allgemeinen Thetafunctionen n^{ter} Ordnung durch die ursprünglichen Thetafunctionen darzustellen. Bezeichnen wir durch θ_0 und θ_1 irgend zwei von den Functionen $\vartheta_{gh}^2(v)$ und mit $F^r(\theta_0, \theta_1)$ eine ganze rationale und homogene Function r^{ter} Ordnung der beiden Argumente θ_0, θ_1, so erhalten wir die folgenden Darstellungen:

I. $n \equiv 0 \bmod 2$, gerade Functionen.

$$\theta_{00}^{(n)}(v) = F^{\frac{1}{2}n}(\theta_0, \theta_1),$$

$$\theta_{01}^{(n)}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{01}(v)\,F^{\frac{1}{2}n-1}(\theta_0, \theta_1),$$

$$\theta_{10}^{(n)}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{10}(v)\,F^{\frac{1}{2}n-1}(\theta_0, \theta_1),$$

$$\theta_{11}^{(n)}(v) = \vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{01}(v)\,F^{\frac{1}{2}n-1}(\theta_0, \theta_1).$$

Ungerade Functionen.

$$\theta_{00}^{(n)}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{01}(v)\,\vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{11}(v)\,F^{\frac{1}{2}n-2}(\theta_0,\theta_1),$$
$$\theta_{01}^{(n)}(v) = \vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{11}(v)\,F^{\frac{1}{2}n-1}(\theta_0,\theta_1),$$
$$\theta_{10}^{(n)}(v) = \vartheta_{01}(v)\,\vartheta_{11}(v)\,F^{\frac{1}{2}n-1}(\theta_0,\theta_1),$$
$$\theta_{11}^{(n)}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{11}(v)\,F^{\frac{1}{2}n-1}(\theta_0,\theta_1).$$

II. $n \equiv 1 \mod 2$, gerade Functionen.

$$\theta_{00}^{(n)}(v) = \vartheta_{00}(v)F^{\frac{1}{2}(n-1)}(\theta_0,\theta_1),$$
$$\theta_{01}^{(n)}(v) = \vartheta_{01}(v)F^{\frac{1}{2}(n-1)}(\theta_0,\theta_1),$$
$$\theta_{10}^{(n)}(v) = \vartheta_{10}(v)F^{\frac{1}{2}(n-1)}(\theta_0,\theta_1),$$
$$\theta_{11}^{(n)}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{01}(v)\,\vartheta_{10}(v)F^{\frac{1}{2}(n-3)}(\theta_0,\theta_1).$$

Ungerade Functionen.

$$\theta_{00}^{(n)}(v) = \vartheta_{01}(v)\,\vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{11}(v)F^{\frac{1}{2}(n-3)}(\theta_0,\theta_1),$$
$$\theta_{01}^{(n)}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{11}(v)F^{\frac{1}{2}(n-3)}(\theta_0,\theta_1),$$
$$\theta_{10}^{(n)}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{01}(v)\,\vartheta_{11}(v)F^{\frac{1}{2}(n-3)}(\theta_0,\theta_1),$$
$$\theta_{11}^{(n)}(v) = \vartheta_{11}(v)F^{\frac{1}{2}(n-1)}(\theta_0,\theta_1).$$

Bei dem Beweise der Richtigkeit dieser Tabelle beschränken wir uns auf einen Fall. Wir nehmen n ungerade an, ferner die gerade Function $\theta_{00}^{(n)}(v)$. Dieselbe hat dann nach dem bewiesenen Lehrsatz $\frac{n+1}{2}$ Constanten linear in sich oder lässt sich durch $\frac{n+1}{2}$ Functionen, die denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten und linear von einander unabhängig sind, linear darstellen. Nun leistet eine jede Function:

$$\vartheta_{00}(v)\,\theta_0^r\,.\,\theta_1^{\frac{1}{2}(n-1)-r}, \quad r = 0, 1, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$$

thatsächlich denselben Bedingungsgleichungen Genüge, ferner ist die Anzahl derselben $\frac{1}{2}(n+1)$. Eben so leicht aber ist es nachzuweisen, dass alle diese Functionen linear von einander unabhängig sein müssen. In der That, wäre dasselbe nicht der Fall, so müsste eine Gleichung von der Form bestehen:

$$\sum c_r\,.\,\theta_0^r\,.\,\theta_1^{\frac{1}{2}(n-1)-r} = 0.$$

Das ist unmöglich. Setzen wir z. B.

$$\theta_0 = \vartheta_0^2(v), \quad \theta_1 = \vartheta_1^2(v)$$

und nehmen $v = 0$ an, so würde folgen $c_0 = 0$. Die linke Seite unserer Gleichung wäre demnach theilbar durch θ_1. Denken wir uns diesen Factor abgesondert und wieder $v = 0$ gesetzt, so würde $c_1 = 0$ sein etc., es zeigt sich, dass die sämmtlichen Constanten $c_0, c_1, c_2 \ldots$ verschwinden müssen. Damit ist die Richtigkeit der Behauptung nachgewiesen und genau so kann in jedem Falle vorgegangen werden.

§ 29.[11])

Die reciproken Thetafunctionen. Reihenentwickelungen derselben.

Ehe wir nun dazu übergehen, durch Quotientenbildung periodische Functionen zu erhalten, wollen wir die reciproken Thetafunctionen näher untersuchen und zunächst ihre Entwickelung in Fourier'sche Reihen in Betracht ziehen. Das elegante Verfahren, welches hierbei angewendet werden soll, rührt von Biehler her.

Wir betrachten zunächst die Function:

$$\frac{1}{\vartheta_0(v)}.$$

Dieselbe erfüllt in einem unendlich langen Streifen, der von zwei durch die Punkte $-\frac{\tau}{2}$ und $+\frac{\tau}{2}$ gezogenen Parallelen zur reellen Axe begrenzt wird, die Bedingungen, welche behufs Entwickelung in eine trigonometrische Reihe hinreichend sind, und zwar können wir den Ansatz machen:

$$\frac{1}{\vartheta_0(v)} = \sum A_m \cos 2m\pi v.$$

Es handelt sich darum, die Grössen A_m zu bestimmen. Wir nehmen hierzu die zweite Function:

$$\frac{1}{\vartheta_1(v)}$$

mit in die Betrachtung hinein. Dieselbe lässt sich in keine trigonometrische Reihe entwickeln, wohl aber thut es die Function:

$$\frac{1}{\vartheta_1(v)} - \frac{\alpha}{\sin \pi v},$$

wenn wir setzen:

$$\alpha = \frac{\pi}{\vartheta'_1}.$$

Die Richtigkeit der Behauptung folgt unmittelbar und ebenso das Intervall, innerhalb dessen die Entwickelung möglich ist. Wir können unter solchen Umständen den Ansatz machen:

$$\frac{1}{\vartheta_1(v)} = \frac{\alpha}{\sin \pi v} + \sum B_m \sin(2m+1)\pi v.$$

Nun besteht aber die Beziehung:

$$\frac{1}{\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}\left(2v+\frac{\tau}{2}\right)}}{\vartheta_0(v)}.$$

Diese Beziehung wollen wir anwenden. Es ist:

$$\frac{\alpha}{\sin \pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{2i\alpha}{e^{i\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} - e^{-i\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}} = -\frac{2i\alpha q^{\frac{1}{2}}.e^{i\pi v}}{1-q.e^{2\pi i v}}$$

$$= -2i\alpha q^{\frac{1}{2}}.\,e^{i\pi v}\sum_0^\infty {}^m q^m.\,e^{2\pi i m v}.$$

Ferner folgt:

$$\sum B_m \sin(2m+1)\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{2i}\sum B_m\left(e^{(2m+1)\pi i v}.q^{\frac{2m+1}{2}} - e^{-(2m+1)\pi i v}.q^{-\frac{2m+1}{2}}\right).$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung:

$$\frac{1}{\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{\alpha}{\sin\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} + \sum B_m \sin(2m+1)\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)$$

ein und berücksichtigen die vorhin angegebene Beziehung:

$$\frac{1}{\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}\left(2v+\frac{\tau}{2}\right)}}{\vartheta_0(v)},$$

welche für alle Werthe von v Richtigkeit besitzt, so folgen durch Vergleichung die Relationen:

$$-iq^{\frac{1}{4}}\frac{A_m}{2} = -2i\alpha q^{\frac{2m+1}{2}} + \frac{B_m}{2i}q^{\frac{2m+1}{2}},$$

$$\frac{B_m}{i}q^{-\frac{2m+1}{2}} = iq^{\frac{1}{4}}A_{m+1}.$$

Hieraus folgt:

$$A_m = -A_{m-1}q^{-2m+1} + 4\alpha q^{-\left(m-\frac{1}{4}\right)}$$

oder also wir erhalten die Beziehung:

$$A_m q^{m^2} = (-1)^m 2\left(A_0 + 2\alpha\sum_{\mu=1}^{\mu=m}(-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}\right).$$

Lassen wir m immer grösser und grösser werden, so wird A_m immer kleiner und kleiner und wird für $m = \infty$ der Null gleich. Unter solchen Umständen wird:

$$A_0 + 2\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} = 0$$

oder also:

$$A_0 = -2\alpha \sum_1^\infty (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}.$$

Hieraus folgt:

$$A_0 + 2\alpha \sum_1^m (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} = -2\alpha \sum_{m+1}^\infty (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}.$$

Mithin erhalten wir für A_m die Gleichung:

$$A_m \cdot q^{m^2} = (-1)^{m+1} 4\alpha \sum_{m+1}^\infty (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}.$$

Wir können hierfür auch schreiben:

$$A_m \cdot q^{m^2} = 4\alpha \sum_1^\infty (-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2m+2\mu-1)^2}{4}}$$

oder also wir erhalten die Relation:

$$A_m = 4\alpha \sum_1^\infty (-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4} + m(2\mu-1)}.$$

Unter solchen Umständen nimmt die Fourier'sche Reihe die folgende Gestalt an:

$$1)\quad \frac{\vartheta'_1}{2\pi\vartheta_0(v)} = \sum_1^\infty (-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4} + m(2\mu-1)} \cos 2m\pi v.$$

Um eine einfachere Schreibweise zu erhalten, wollen wir die Grössen:

$$2)\qquad a_r = \sum_0^\infty {}^\mu (-1)^\mu q^{(r+\mu+\frac{1}{2})^2}$$

als selbstständige Grössen einführen. Dieselben leisten den Gleichungen Genüge:

$$a_{r+1} + a_r = q^{(r+\frac{1}{2})^2},$$
$$a_r = a_{-r},$$

überdies lassen sich die trigonometrischen Reihen für die gewöhnlichen Thetafunctionen mit ihrer Hülfe in eine neue einfache Form bringen. Es folgt nämlich das Gleichungssystem:

$$3) \quad \begin{cases} \vartheta_0(v) = q^{-\frac{1}{4}}(1 - e^{2i\pi v}.q)\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^r(-1)^r a_r . q^r . e^{2i\pi r v}, \\ \vartheta_1(v) = 4 \sin \pi v \left(\frac{a_0}{2} - a_1 . \cos 2\pi v + a_2 . \cos 4\pi v + \cdots\right), \\ \vartheta_2(v) = 4 \cos \pi v \left(\frac{a_0}{2} + a_1 . \cos 2\pi v + a_2 . \cos 4\pi v + \cdots\right), \\ \vartheta_3(v) = q^{-\frac{1}{4}}(1 + e^{2i\pi v}.q)\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^r a_r . q^r . e^{2i\pi r v}. \end{cases}$$

Daneben aber dienen sie dazu, die reciproken Thetafunctionen in einfacher Weise darzustellen. Für die reciproke ϑ_0-Function haben wir die Entwickelung gegeben, so zwar, dass die Entwickelung der reciproken ϑ_1-Function sich auch unmittelbar ergiebt. Die beiden fehlenden reciproken Thetafunctionen sind dann aber auch sofort bekannt und zwar erhalten wir die Resultate:

$$4) \quad \frac{\vartheta'_1}{2\pi\vartheta_0(v)} = a_0 + 2\sum_1^{\infty} a_m . q^{-m^2} . \cos 2m\pi v,$$

$$5) \quad \frac{\vartheta'_1}{\pi . \vartheta_1(v)} = \frac{1}{\sin \pi v} - 2\sum_0^{\infty} a_{m+1} . q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} . \sin(2m+1)\pi v,$$

$$6) \quad \frac{\vartheta'_1}{\pi . \vartheta_2(v)} = \frac{1}{\cos \pi v} + 2\sum_0^{\infty}{}^m (-1)^{m+1} . a_{m+1} . q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} . \cos(2m+1)\pi v,$$

$$7) \quad \frac{\vartheta'_1}{2\pi\vartheta_3(v)} = a_0 + 2\sum_1^{\infty}{}^m (-1)^m . a_m . q^{-m^2} . \cos 2m\pi v.$$

Aus diesen Darstellungen können nun zwei weitere gewonnen werden, die auch von Interesse sind. In der That, es ist:

$$-i \operatorname{cotang} \pi\left(v - \frac{(2\mu-1)\tau}{2}\right) = \frac{1 + q^{2\mu-1} e^{-2\pi i v}}{1 - q^{2\mu-1} e^{-2\pi i v}} = 1 + 2\sum_1^{\infty}{}^m q^{(2\mu-1)m} e^{-2\pi i m v},$$

$$i \operatorname{cotang} \pi\left(v + \frac{(2\mu-1)\tau}{2}\right) = \frac{1 + q^{2\mu-1} e^{2\pi i v}}{1 - q^{2\mu-1} e^{2\pi i v}} = 1 + 2\sum_1^{\infty}{}^m q^{(2\mu-1)m} e^{2\pi i m v}.$$

Hieraus folgt zunächst:

$$\frac{2(1 - q^{4\mu-2})}{1 - 2q^{2\mu-1} . \cos 2\pi v + q^{4\mu-2}} = 2 + 4\sum_1^{\infty}{}^m q^{(2\mu-1)m} . \cos 2\pi m v.$$

Erwägen wir diese Beziehung, so erhalten wir für die zuerst betrachtete Function die Darstellung:

$$8) \quad \frac{\vartheta'_1}{2\pi\vartheta_0(v)} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} (1 - q^{4\mu-2})}{1 - 2q^{2\mu-1} \cos 2\pi v + q^{4\mu-2}}.$$

Genau so einfach folgen die weiteren drei Formeln:

$$9)\qquad \frac{\vartheta'_1}{\pi\vartheta_1(v)} = \frac{1}{\sin\pi v} + 4\sin\pi v\sum_1^\infty \frac{(-1)^\mu q^{\mu(\mu+1)}(1+q^{2\mu})}{1-2q^{2\mu}\cos 2\pi v + q^{4\mu}},$$

$$10)\qquad \frac{\vartheta'_1}{\pi\vartheta_2(v)} = \frac{1}{\cos\pi v} + 4\cos\pi v\sum_1^\infty \frac{(-1)^\mu q^{\mu(\mu+1)}(1+q^{2\mu})}{1+2q^{2\mu}\cos 2\pi v + q^{4\mu}},$$

$$11)\qquad \frac{\vartheta'_1}{2\pi\vartheta_3(v)} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}(1-q^{4\mu-2})}{1+2q^{2\mu-1}\cos 2\pi v + q^{4\mu-2}}.$$

Zu gleicher Zeit aber erhalten wir schliesslich die Darstellungen:

$$12)\qquad \frac{\vartheta'_1}{\pi\vartheta_0(v)} = -i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} \operatorname{cotang}\pi\left(v-(2\mu-1)\frac{\tau}{2}\right),$$

$$13)\qquad \frac{\vartheta'_1}{\pi\vartheta_1(v)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^\mu q^{\mu^2}}{\sin\pi(v-\mu\tau)},$$

$$14)\qquad \frac{\vartheta'_1}{\pi\vartheta_2(v)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^\mu q^{\mu^2}}{\cos\pi(v-\mu\tau)},$$

$$15)\qquad \frac{\vartheta'_1}{\pi\vartheta_3(v)} = i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} \operatorname{tang}\pi\left(v-(2\mu-1)\frac{\tau}{2}\right).$$

Es sind dieses die Darstellungen, welche zunächst für die Thetafunctionen gegeben werden sollten.

§ 30.[12])

Bildung der einfachsten doppeltperiodischen Functionen erster Art. Einführung der Grössen k und k' und der drei Functionen $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$.

In den vorangegangenen Paragraphen sind die Haupteigenschaften der Thetafunctionen abgeleitet worden. Mit ihrer Hülfe können nun nach angegebenen Regeln doppeltperiodische Functionen erster Art gebildet werden. Die einfachste Methode, derartige Functionen zu erhalten, wird in der Bildung von Quotienten von je zwei unserer Thetafunctionen erster Ordnung bestehen. In der That, nehmen wir den Quotienten:

$$F(v) = \frac{\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_\beta(v)},$$

in welchem α und β beliebige Indices bedeuten, so leistet derselbe jedenfalls den Gleichungen Genüge:

$$F(v+2) = F(v),$$
$$F(v+2\tau) = F(v),$$

besitzt also jedenfalls die Perioden 2 und 2τ. Im Ganzen werden sich zwölf Quotienten der genannten Art ergeben. Aus den Resultaten der früheren Paragraphen folgt dann, dass von den Quadraten dieser zwölf Grössen nur ein einziges unabhängig sein kann, während die anderen sich rational durch dasselbe ausdrücken lassen. Wir wollen hier nicht die ganze Mannigfaltigkeit der Beziehungen entwickeln, sondern beschränken uns darauf, die drei Quotienten zu betrachten, deren Nenner die Function $\vartheta_0^2(v)$ ist. Die Thetarelationen nun, die wir im Früheren gefunden haben, können dann geschrieben werden:

$$\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2}\frac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_0^2(v)} = 1 - \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)},$$
$$\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}\frac{\vartheta_3^2(v)}{\vartheta_0^2(v)} = 1 - \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)}.$$

Dabei besteht zwischen den Thetafunctionen für den Nullwerth des Argumentes die Relation:

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4.$$

Diese letzte Relation können wir nach Einführung zweier neuer Grössen anders schreiben. Wir setzen dazu:

$$1)\qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3},$$

$$2)\qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3},$$

dann folgt die Relation:

$$3)\qquad k^2 + k'^2 = 1.$$

Mit Hülfe dieser Grössen können die Gleichungen zwischen den Thetaquotienten, die soeben entwickelt worden sind, folgendermassen geschrieben werden, wenn wir uns noch links und rechts die Quadratwurzel gezogen denken:

$$\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)} = \sqrt{1 - \frac{1}{k}\frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)}},$$
$$\sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} = \sqrt{1 - k\frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)}}.$$

Eine besonders einfache Gestalt nehmen diese Gleichungen an, wenn wir setzen:

$$4)\ \varphi_1(v) = \sqrt{\frac{1}{k}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},\quad 5)\ \varphi_2(v) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},\quad 6)\ \varphi_3(v) = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)},$$

nämlich die Form:

$$7)\qquad \varphi_2(v) = \sqrt{1-\varphi_1(v)^2},$$

$$8)\qquad \varphi_3(v) = \sqrt{1-k^2\varphi_1(v)^2}.$$

Dabei sind dann die Grössen $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$ eindeutige Functionen von v und τ, ferner k und k' eindeutige Functionen von τ. Der Wichtigkeit der Sache halber mögen ihre Werthe ausführlich hingeschrieben werden:

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = \frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots},$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots},$$

$$\varphi_1(v) = \sqrt{\frac{1}{k}}\frac{2\sqrt[4]{q}\sin\pi v - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3\pi v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5\pi v\ldots}{1-2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v-2q^9\cos 6\pi v\ldots},$$

$$\varphi_2(v) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{2\sqrt[4]{q}\cos\pi v + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3\pi v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5\pi v\ldots}{1-2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v-2q^9\cos 6\pi v\ldots},$$

$$\varphi_3(v) = \sqrt{k'}\frac{1+2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v+2q^9\cos 6\pi v+\cdots}{1-2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v-2q^9\cos 6\pi v\ldots}.$$

§ 31.

Entwickelung der Functionen $\varphi_\alpha(v)$ um den Nullpunkt in eine Potenzreihe. Einführung einer neuen Veränderlichen u.

Es soll jetzt versucht werden, die drei Functionen $\varphi_\alpha(v)$ um den Punkt $v = 0$ herum in eine Potenzreihe zu entwickeln. Hierbei soll aber zunächst der Schwerpunkt lediglich auf die Form der Coefficienten gelegt werden, während die wirkliche Berechnung derselben erst später zu untersuchen sein wird. Zunächst ist es klar, dass alle drei Functionen thatsächlich um den Nullpunkt von v herum in eine Potenzreihe entwickelt werden können. In der That, Zähler wie Nenner der drei Functionen können, wie aus den früheren Untersuchungen unmittelbar gefolgert werden kann, als beständig convergente Potenzreihen von v dargestellt werden. Dabei hat die Potenzreihe von $\vartheta_0(v)$ die Eigenthümlichkeit, dass sie im Punkte $v = 0$ nicht verschwindet. Unter solchen Umständen können wir die drei Quotienten in eine Potenzreihe von v verwandeln, und zwar reicht deren Convergenzbezirk bis zum

nächsten Nullpunkt von $\vartheta_0(v)$. Zur wirklichen Ausführung müssen die Differentialquotienten bestimmt werden. Es kann dieses auf mehrfachem Wege geschehen. Wir wollen das Hermite'sche Princip anwenden. Nehmen wir den Ausdruck:

$$f(v) = \vartheta_0^2(v) \frac{d \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}}{dv},$$

so ist derselbe eine ganze Function von v, welche den beiden Bedingungsgleichungen Genüge leistet:

$$f(v+1) = -f(v),$$
$$f(v+\tau) = e^{-2\pi i(2v+\tau)} f(v).$$

Es ist dieselbe also eine Thetafunction zweiter Ordnung mit der Charakteristik $(1, 0)$ und kann daher nach bekannten Regeln durch die ursprünglichen Thetafunctionen dargestellt werden.

Wir erhalten die Gleichung:

$$\vartheta_0^2(v) \frac{d \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}}{dv} = c_1 \vartheta_2(v) \vartheta_3(v) + c_2 \vartheta_1(v) \vartheta_0(v).$$

Die Constantenbestimmung erfolgt wiederum, indem wir dem Argumente v bestimmte Werthe beilegen. Setzen wir $v = 0$, so folgt:

$$c_1 = \frac{\vartheta_0 . \vartheta'_1}{\vartheta_2 . \vartheta_3},$$

während in ähnlicher Weise wird:

$$c_2 = 0.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir die Formel:

$$\vartheta_0^2(v) \frac{d \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}}{dv} = \frac{\vartheta_0 . \vartheta'_1}{\vartheta_2 . \vartheta_3} \vartheta_2(v) \vartheta_3(v),$$

welche schon früher auf einem anderen Wege abgeleitet war. Bei Einführung der Functionen $\varphi(v)$ können wir die Gleichung schreiben:

$$1) \qquad \frac{d\varphi_1(v)}{dv} = \pi \vartheta_3^2 . \varphi_2(v) \varphi_3(v).$$

Genau so wird:

$$2) \qquad \frac{d\varphi_2(v)}{dv} = -\pi \vartheta_3^2 . \varphi_3(v) \varphi_1(v),$$

$$3) \qquad \frac{d\varphi_3(v)}{dv} = -\pi \vartheta_3^2 . k^2 . \varphi_1(v) \varphi_2(v).$$

Setzen wir in diesen Formeln $v = 0$, so erhalten wir die Coefficienten von v in der Entwickelung unserer Functionen in eine Potenzreihe von v. Durch nochmaliges wiederholtes Differenziren ergeben sich ebenso einfach die höheren Differentialquotienten und damit die Coefficienten der einzelnen Potenzen von v. Die Ausdrücke gestalten sich ganz besonders einfach, wenn wir an Stelle der Veränderlichen v eine neue Veränderliche u einführen, die mit ihr durch die Gleichung verbunden ist:

$$4)\qquad u = \pi . \vartheta_3^2 . v.$$

Diese neue Grösse u hängt dann in eindeutiger Weise von v und τ ab und es werden die drei Functionen $\varphi_\alpha(v)$ auch ihrerseits als eindeutige Functionen von u und τ aufgefasst werden können, die sich um den Punkt $u = 0$ herum in eine Potenzreihe entwickeln lassen. Dann aber wird:

$$5)\qquad \frac{d\varphi_1(v)}{du} = \varphi_2(v)\varphi_3(v),$$

$$6)\qquad \frac{d\varphi_2(v)}{du} = -\varphi_3(v)\varphi_1(v),$$

$$7)\qquad \frac{d\varphi_3(v)}{du} = -k^2\varphi_1(v)\varphi_2(v).$$

Bilden wir mit Hülfe dieser Gleichungen die höheren Differentialquotienten und setzen in ihnen $v = 0$, so folgt der wichtige

Lehrsatz: Die drei Functionen $\varphi_\alpha(v)$ lassen sich um den Punkt $u = \pi . \vartheta_3^2 . v = 0$ herum in eine Potenzreihe entwickeln, deren Coefficienten sich ganz und rational durch die eine Grösse k^2 ausdrücken lassen.

In dem letzten Umstande liegt die Bedeutung des Satzes. Aus den ursprünglichen Darlegungen konnten wir nur schliessen, dass die Coefficienten sich in eindeutiger Weise durch τ ausdrücken lassen, jetzt folgt das weitere wichtige Resultat, dass diese eindeutigen Functionen von τ sich als ganze rationale Functionen von k^2 darstellen lassen. Um nun den Charakter dieser Darstellung näher zu studiren, wollen wir zusehen, ob es nicht möglich sein sollte, Zähler und Nenner der drei Functionen $\varphi_\alpha(v)$ in ähnlicher Weise zu untersuchen. Zähler wie Nenner sind aber, von Constanten abgesehen, Thetafunctionen erster Ordnung. Dieselben lassen sich jedenfalls in beständig convergirende Potenzreihen von v und damit von u entwickeln. Um die Natur dieser Entwickelungen näher zu erkennen, wollen wir die Logarithmen der

Thetafunctionen untersuchen und deren Differentialquotienten bilden. Aus ihnen können dann die nöthigen Rückschlüsse auf die Entwickelung der Thetafunctionen selbst gemacht werden.

§ 32.

Untersuchung der Logarithmen der Thetafunctionen erster Ordnung. Einführung der Functionen $Al_\alpha(u)$.

Ist α ein gerader Index, so ist klar, dass die Logarithmen von $\vartheta_\alpha(v)$ nach positiven Potenzen von v entwickelt werden können. Hierzu ist es nöthig, die Differentialquotienten von $\log\vartheta_\alpha(v)$ zu untersuchen. Wir wollen das Problem auch auf $\vartheta_1(v)$ ausdehnen und allgemein das Problem stellen, die Differentialquotienten der Logarithmen der vier Thetafunctionen zu untersuchen. Sehen wir von dem ersten Differentialquotienten ab, so führt auch hier das Hermite'sche Princip zum Ziel. In der That, nehmen wir den Ausdruck:

$$f(v) = \vartheta_0^2(v)\frac{d^2\log\vartheta_0(v)}{dv^2},$$

so ist dieser eine ganze transcendente Function von v, welche den Gleichungen Genüge leistet:

$$f(v+1) = f(v),$$

$$f(v+\tau) = e^{-2\pi i(2v+\tau)}f(v).$$

Dieselbe ist also eine Thetafunction zweiter Ordnung mit der Charakteristik $(0,0)$, so dass wir die folgende Darstellung erhalten:

$$\frac{d^2\log\vartheta_0(v)}{dv^2} = c_1 + c_2\frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)}.$$

Die Constanten bestimmen wir wieder, indem wir für v specielle Werthe einsetzen. Setzen wir $v = 0$, so wird:

$$c_1 = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}.$$

Genau so folgt:

$$c_2 = -\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2},$$

so dass wir die Formel erhalten:

$$1)\qquad \frac{d^2\log\vartheta_0(v)}{dv^2} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)}.$$

Genau so wird:

2) $$\frac{d^2 \log \vartheta_1(v)}{dv^2} = \frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta'^2_1}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_0^2(v)}{\vartheta_1^2(v)},$$

3) $$\frac{d^2 \log \vartheta_2(v)}{dv^2} = \frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta'^2_1}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_3^2(v)}{\vartheta_2^2(v)},$$

4) $$\frac{d^2 \log \vartheta_3(v)}{dv^2} = \frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta'^2_1}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3^2(v)}.$$

Diese Formeln können wir folgendermassen schreiben:

$$\frac{d^2 \log \vartheta_0(v) e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{dv^2} = -\frac{\vartheta'^2_1}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)},$$

$$\frac{d^2 \log \vartheta_1(v) e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{dv^2} = -\frac{\vartheta'^2_1}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_0^2(v)}{\vartheta_1^2(v)},$$

$$\frac{d^2 \log \vartheta_2(v) e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{dv^2} = -\frac{\vartheta'^2_1}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_3^2(v)}{\vartheta_2^2(v)},$$

$$\frac{d^2 \log \vartheta_3(v) e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{dv^2} = -\frac{\vartheta'^2_1}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_3^2(v)}.$$

Auch hier zeigt sich die Einführung der Veränderlichen:

$$u = \pi . \vartheta_3^2 . v$$

von grosser Bedeutung. In der That, sehen wir unsere Functionen als von u abhängig an, so nehmen die Formeln die Gestalt an:

5) $$\frac{d^2 \log \vartheta_0(v) e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{du^2} = -k^2 \varphi_1(v)^2,$$

6) $$\frac{d^2 \log \vartheta_1(v) e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{du^2} = -\frac{1}{\varphi_1(v)^2},$$

7) $$\frac{d^2 \log \vartheta_2(v) e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{du^2} = -\frac{\varphi_3(v)^2}{\varphi_2(v)^2},$$

8) $$\frac{d^2 \log \vartheta_3(v) e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{du^2} = -k^2\frac{\varphi_2(v)^2}{\varphi_3(v)^2}.$$

Hieraus folgt dann, dass, wenn α einen geraden Index bedeutet, die sämmtlichen Differentialquotienten von

$$\log \vartheta_\alpha(v) e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}$$

vom zweiten ab genommen nach der Veränderlichen u im Punkte $u = 0$ sich ganz und rational durch die eine Grösse k^2 ausdrücken lassen.

Die ersten Differentialquotienten verschwinden im Punkte $u = 0$, ferner nehmen die constanten Glieder den Werth Null an, wenn wir die Logarithmen der Functionen betrachten:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_\alpha} e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}.$$

Es folgt dann, dass wir die Logarithmen und mit ihnen die Functionen selbst nach Potenzen von u entwickeln können, so zwar, dass die Coefficienten sich ganz und rational durch k^2 ausdrücken lassen. Für die Functionen müssen die Potenzreihen beständig convergirende sein, da sich sowohl $\frac{\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_\alpha}$, als auch $e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}$ in beständig convergente Potenzreihen von u entwickeln lassen müssen, also ihr Product auch, und da es ferner völlig gleichgültig ist, wie wir die Coefficienten berechnen. Es sind also die soeben betrachteten Functionen ganze transcendente Functionen von u, deren Coefficienten sich ganz und rational durch k^2 darstellen lassen. Wir wollen sie bezeichnen durch:

$$9)\qquad Al_\alpha(u) = \frac{\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_\alpha} e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}.$$

Zu ähnlichen Resultaten kommt man im Falle des einzigen ungeraden Index 1. Setzt man:

$$10)\qquad Al_1(u) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0}\,\vartheta_1(v)\, e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}},$$

so gilt für $Al_1(u)$ dasselbe Resultat, wie für die drei Functionen mit geradem Index. Wir finden also den

Lehrsatz: Die vier definirten Functionen $Al_\beta(u)$ sind ganze transcendente Functionen von u, deren Coefficienten sich ganz und rational aus k^2 zusammensetzen lassen.

Aus der Entwickelung der Functionen $Al_\beta(u)$ folgen dann die Entwickelungen der Thetafunctionen selbst. Von einem constanten Factor abgesehen, lassen sich dieselben als Product von $e^{\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}$ und je einer ganzen transcendenten Function von u darstellen, deren Coefficienten sich ganz und rational durch k^2 darstellen.

§ 33.[15])

Definition der Functionen *snu*, *cnu*, *dnu*. Einfachste Eigenschaften derselben.

Die letzten Betrachtungen ermöglichen nun völlig über den Charakter der Functionen $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$ ins Klare zu kommen, wenn

man dieselben als von u und k^2 abhängig ansieht. In der That, es lassen sich diese Functionen als Quotienten je zweier der Functionen $Al_\alpha(u)$ darstellen, und zwar wird:

$$\varphi_1(v) = \frac{Al_1(u)}{Al_0(u)},$$

$$\varphi_2(v) = \frac{Al_2(u)}{Al_0(u)},$$

$$\varphi_3(v) = \frac{Al_3(u)}{Al_0(u)}.$$

Es sind die drei Functionen $\varphi_\alpha(v)$ also die Quotienten von ganzen transcendenten Functionen von u, deren Coefficienten sich ganz und rational durch k^2 darstellen lassen. Fassen wir zusammen, so finden wir den

Lehrsatz: Die drei Functionen $\varphi_\alpha(v)$ lassen sich auf doppelte Weise darstellen. Erstens sind sie Quotienten je zweier ganzer transcendenter Functionen von v, deren Coefficienten eindeutige Functionen von τ sind, zweitens aber lassen sie sich auch als Quotienten je zweier ganzen transcendenten Functionen einer neuen Veränderlichen u darstellen, die mit der ursprünglichen v durch die Gleichung verbunden ist:

$$u = \pi\vartheta_3^2 v.$$

Die Coefficienten in der letzten Entwickelung setzen sich ganz und rational aus k^2 zusammen. Dabei sind u und k^2 eindeutig bestimmt, wenn v und τ gegeben sind. Das Umgekehrte findet nicht statt, kann aber erst später erörtert werden.

Jedenfalls also sind die Functionen $\varphi_\alpha(v)$ eindeutige Functionen von u und k^2. Als solche haben sie in der Theorie der periodischen Functionen eine eigene Bezeichnung gefunden, zu welcher wir auf folgendem Wege gelangen. Aus den Beziehungen, denen die Functionen $\varphi_\alpha(v)$ Genüge leisten, können wir schliessen, dass der Ansatz erlaubt ist:

$$\varphi_1(v) = \sin\varphi, \quad \varphi_2(v) = \cos\varphi, \quad \varphi_3(v) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

Wir wollen nach Legendre setzen:

$$1) \qquad \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi,$$

so nehmen die drei Gleichungen die Form an:

$$2)\ \varphi_1(v) = \sin\varphi, \quad 3)\ \varphi_2(v) = \cos\varphi, \quad 4)\ \varphi_3(v) = \Delta\varphi.$$

Durch diese drei Gleichungen ist der Winkel φ bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt, wenn v und τ oder u und k^2 gegeben

sind. Fügt man die Annahme hinzu, wozu man berechtigt ist, φ sei eine stetige Function von u oder v, so wird φ eindeutig bestimmt sein, wenn man für einen Werth von v oder u das dazugehörende φ bestimmt. Wir wollen nun annehmen, dass $u = 0$ auch $\varphi = 0$ entspricht, dann ist alles eindeutig bestimmt. Wir wollen nun in der Folge die Grösse φ im Wesentlichen als Function von u und k ansehen und sie als solche mit dem Namen der Amplitude von u mit dem Modul k bezeichnen. Wo kein Missverständniss über den Werth von k möglich ist, schreiben wir:

$$\varphi = am u, \tag{5}$$

wo dasselbe möglich ist:

$$\varphi = am(u, k). \tag{6}$$

Dann erhalten wir die Gleichungen:

$$\varphi_1(v) = sin\,am u, \quad \varphi_2(v) = cos\,am u, \quad \varphi_3(v) = \Delta am u$$

oder auch:

$$\varphi_1(v) = sin\,am(u, k), \quad \varphi_2(v) = cos\,am(u, k), \quad \varphi_3(v) = \Delta am(u, k).$$

Gudermann hat an Stelle dieser Bezeichnungen kürzere eingeführt, nämlich:

$$7)\ \varphi_1(v) = snu, \quad 8)\ \varphi_2(v) = cnu, \quad 9)\ \varphi_3(v) = dnu.$$

Wo über den Werth von k ein Zweifel möglich ist, schreiben wir auch:

$$10)\ \varphi_1(v) = sn(u, k), \quad 11)\ \varphi_2(v) = cn(u, k), \quad 12)\ \varphi_3(v) = dn(u, k).$$

u nennen wir das Argument, k den Modul der drei Functionen snu, cnu, dnu, die Functionen selbst nennen wir auch elliptische Functionen. Zwischen ihnen und den Thetafunctionen bestehen dann die Beziehungen:

$$snu = \sqrt{\frac{1}{k}}\,\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \tag{13}$$

$$cnu = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \tag{14}$$

$$dnu = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}. \tag{15}$$

$$u = \pi.\vartheta_3^2.v, \quad k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \quad k' = \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}.$$

Aus den Eigenschaften der Thetafunctionen resp. der Functionen $\varphi_\alpha(v)$ folgen dann unmittelbar entsprechende Eigenschaften der Functionen snu, cnu, dnu. Vermehrt man v um 1, so wird u um $\pi\vartheta_3^2$ vermehrt. Wir wollen diese Grösse bezeichnen durch:

16) $$\pi . \vartheta_3^2 = 2K,$$

dann folgt zu gleicher Zeit:

17) $\pi . \vartheta_2^2 = 2k . K,$ 18) $\pi . \vartheta_0^2 = 2k' . K.$

Vermehrt man v um τ, so wird u um $\pi \vartheta_3^2 \tau$ vermehrt. Wir wollen diese Grösse bezeichnen durch $2iK'$ d. h. setzen:

19) $$\tau = \frac{iK'}{K}.$$

Der Tabelle für die Vermehrung des Argumentes der Thetafunctionen um ganze resp. halbe Perioden wird dann eine Tabelle für die Vermehrung von u um ganze resp. halbe Vielfache von $2K$ und $2iK'$ entsprechen, die folgendermassen lautet:

Vermehrung des Argumentes	snu	cnu	dnu
$2mK + 2niK'$	$(-1)^m snu$	$(-1)^{m+n} cnu$	$(-1)^n dnu$
$(2m-1)K + 2niK'$	$(-1)^{m+1} \frac{cnu}{dnu}$	$(-1)^{m+n} k' \frac{snu}{dnu}$	$(-1)^n \frac{k'}{dnu}$
$2mK + (2n+1)iK'$	$(-1)^m \frac{1}{k . snu}$	$(-1)^{m+n+1} \frac{i . dnu}{k . snu}$	$(-1)^{n+1} \frac{i . cnu}{snu}$
$(2m-1)K + (2n+1)iK'$	$(-1)^{m+1} \frac{dnu}{k . cnu}$	$(-1)^{m+n} \frac{i . k'}{k . cnu}$	$(-1)^n \frac{k' . i . snu}{cnu}$

Es sind die drei Functionen snu, cnu, dnu also doppeltperiodische Functionen und zwar mit folgenden Perioden. Die Function snu hat die Perioden:

$$4mK + 2niK'.$$

Alle diese unendlich vielen Perioden lassen sich als Summe ganzzahliger Multipla der Grössen:

$$4K \quad \text{und} \quad 2iK'$$

darstellen. Wir wollen derartige Grössen Elementarperioden nennen.

Die Function cnu hat die Perioden:

$$2mK + 2niK',$$

wenn $m + n = 0 \bmod 2$ ist.

Als Elementarperioden können wir hier die Grössen:

$$4K \quad \text{und} \quad 2K + 2iK'$$

wählen. Die Function dnu endlich hat die Perioden:

$$2mK + 4niK'.$$

Als Elementarperioden können wir die Grössen:

$$2K, \quad 4iK'$$

wählen.

Ferner mögen noch die Null- und Unendlichkeitspunkte der einzelnen Functionen besonders hervorgehoben werden. Die Unendlichkeitspunkte sind für alle Functionen dieselben, und zwar können sie aus den Nullpunkten von $\vartheta_0(v)$ unmittelbar abgeleitet werden; es sind die Punkte:

$$2mK + (2n+1)iK'.$$

Die Sinusamplitude wird Null an den Punkten:

$$2mK + 2niK',$$

die Cosinusamplitude wird Null an den Punkten:

$$(2m-1)K + 2niK',$$

die Deltaamplitude wird Null an den Punkten:

$$(2m-1)K + (2n+1)iK'.$$

Ferner folgt sofort, dass die drei elliptischen Functionen einen jeden Werth, von Multipla von Perioden abgesehen, zwei und nur zweimal annehmen. Zwei der Functionen, die Function cnu und die Function dnu sind gerade Functionen ihres Argumentes, die Function snu dagegen eine ungerade Function. Für den speciellen Werth $u = 0$ wird:

$$sn0 = 0, \quad cn0 = 1, \quad dn0 = 1.$$

Die Differentialquotienten der drei Functionen lauten:

$$\frac{dsnu}{du} = cnu.dnu, \tag{20}$$

$$\frac{dcnu}{du} = -dnu.snu, \tag{21}$$

$$\frac{ddnu}{du} = -k^2 snu.cnu. \tag{22}$$

Endlich haben wir für die Thetafunctionen eine Reihe von Additionstheoremen aufgestellt. Ein Theil derselben lässt sich unmittelbar auf die elliptischen Functionen übertragen. In der That, nehmen wir die Gleichungen:

$$\vartheta_3\vartheta_2\vartheta_1(v\pm w)\vartheta_0(v\mp w) = \vartheta_3(w)\vartheta_2(w)\vartheta_0(v)\vartheta_1(v) \pm \vartheta_0(w)\vartheta_1(w)\vartheta_3(v)\vartheta_2(v),$$

$$\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_0(v\pm w)\vartheta_2(v\mp w) = \vartheta_0(w)\vartheta_2(w)\vartheta_0(v)\vartheta_2(v) \pm \vartheta_1(w)\vartheta_3(w)\vartheta_1(v)\vartheta_3(v),$$

$$\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_0(v\pm w)\vartheta_3(v\mp w) = \vartheta_0(w)\vartheta_3(w)\vartheta_0(v)\vartheta_3(v) \pm \vartheta_1(w)\vartheta_2(w)\vartheta_1(v)\vartheta_2(v),$$

und dividiren die linken Seiten durch die linke, die rechten Seiten durch die rechte der Gleichung:

$$\vartheta_0^2 . \vartheta_0(v+w)\vartheta_0(v-w) = \vartheta_0^2(w)\vartheta_0^2(v) - \vartheta_1^2(w)\vartheta_1^2(v),$$

so ergeben sich nach leichten Reductionen, die auf der Einführung des Moduls k und der elliptischen Functionen beruhen, die Formeln:

$$sn(u \pm v) = \frac{snu . cnv . dnv \pm snv . cnu . dnu}{1 - k^2 . sn^2u . sn^2v}, \tag{23}$$

$$cn(u \pm v) = \frac{cnu . cnv \mp snu . snv . dnu . dnv}{1 - k^2 . sn^2u . sn^2v}, \tag{24}$$

$$dn(u \pm v) = \frac{dnu . dnv \mp k^2 . snu . snv . cnu . cnv}{1 - k^2 . sn^2u . sn^2v} \tag{25}$$

In diesen Formeln ist gesetzt:

$$v = \pi \vartheta_3^2 w = 2Kw.$$

Aus ihnen folgt ferner der

Lehrsatz: Die drei elliptischen Functionen mit den Argumenten $u \pm v$ lassen sich rational durch die elliptischen Functionen mit den Argumenten u und v darstellen.

Zu gleicher Zeit geben diese Formeln als unmittelbare Folge eine Reihe elementarer und wichtiger Beziehungen, von denen wir die folgenden herausgreifen wollen:

$$sn(u+v) + sn(u-v) = 2\,\frac{snu . cnv . dnv}{N},$$

$$sn(u+v) - sn(u-v) = 2\,\frac{snv . cnu . dnu}{N},$$

$$cn(u+v) + cn(u-v) = 2\,\frac{cnu . cnv}{N},$$

$$cn(u+v) - cn(u-v) = -2\,\frac{snu . snv . dnu . dnv}{N},$$

$$dn(u+v) + dn(u-v) = 2\,\frac{dnu . dnv}{N},$$

$$dn(u+v) - dn(u-v) = -2k^2\,\frac{snu . snv . dnu . dnv}{N},$$

$$N = 1 - k^2 . sn^2u . sn^2v.$$

§ 34.[14])

Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen.

Aus den Darstellungen der Thetafunctionen folgen entsprechende Darstellungen der elliptischen Functionen in der Form von Quotienten. Wir wollen diese nicht wieder aufnehmen, wohl aber wollen wir ver-

suchen, die elliptischen Functionen durch unendliche Reihen darzustellen. Die erste Darstellung, die sich hierbei ergiebt, ist die in der Form von trigonometrischen Reihen. Zu derselben kann man auf mannigfachen Wegen gelangen. Die eine Methode besteht in der Multiplication der trigonometrischen Reihen für

$$\frac{1}{\vartheta_\beta(v)}$$

mit den trigonometrischen Reihen für $\vartheta_\alpha(v)$; indessen wollen wir von derselben absehen und diejenige Methode anwenden, die vielleicht am einfachsten zum Ziele führt. Der principielle Theil der Untersuchung ist dabei so einfach, die Grenzen, innerhalb deren die Entwickelungen gelten, so naheliegend, dass wir davon absehen wollen und uns auf die wirkliche Ausrechnung beschränken.

Jedenfalls können wir den Ansatz machen:

$$\frac{2K}{\pi}\frac{1}{sn\,u} = \frac{1}{sin\,\pi v} + \sum B_m \,.\, sin(2m+1)\pi v.$$

Aus diesem Ansatz folgt:

$$\frac{2K}{\pi}\frac{1}{sn(u+iK')} = \frac{1}{sin\,\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \,.\, sin(2m+1)\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right).$$

Die linke Seite ist aber gleich:

$$\frac{2K}{\pi}k\,sn\,u = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \,.\, sin(2m+1)\pi v,$$

wie wir es schreiben wollen. Die rechte Seite nimmt die Form an:

$$-2iq^{\frac{1}{2}}.e^{\pi i v}\sum q^m.e^{2m\pi i v} + \sum\frac{B_m}{2i}\left(e^{(2m+1)\pi i v}q^{\frac{2m+1}{2}} - e^{-(2m+1)\pi i v}q^{-\frac{2m+1}{2}}\right).$$

Die Vergleichung ergiebt:

$$-2iq^{\frac{2m+1}{2}} + \frac{B_m}{2i}q^{\frac{2m+1}{2}} = \frac{A_m}{2i},$$

$$B_m \,.\, q^{-\frac{2m+1}{2}} = A_m.$$

Hieraus folgt:

$$A_m = \frac{4q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}$$

oder also wir erhalten die Darstellung:

$$1)\qquad \frac{2kK}{\pi}sn\,u = 4\sum_0^\infty \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}\,sin(2m+1)\pi v.$$

Zu gleicher Zeit folgt:

$$2)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{1}{snu}=\frac{1}{sin\pi v}+4\sum\frac{q^{2m+1}}{1-q^{2m+1}}sin(2m+1)\pi v.$$

In ganz ähnlicher Weise ergeben sich die Formeln:

$$3)\qquad \frac{2kK}{\pi}cnu=4\sum\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1+q^{2m+1}}cos(2m+1)\pi v,$$

$$4)\qquad \frac{2k'K}{\pi}\frac{1}{cnu}=\frac{1}{cos\pi v}+4\sum(-1)^r\frac{q^{2m+1}}{1+q^{2m+1}}cos(2m+1)\pi v,$$

$$5)\qquad \frac{2K}{\pi}dnu=1+4\sum_1^\infty\frac{q^m}{1+q^{2m}}cos\,2m\pi v,$$

$$6)\qquad \frac{2k'K}{\pi}\frac{1}{dnu}=1+4\sum_1^\infty(-1)^m\frac{q^m}{1+q^{2m}}cos\,2m\pi v.$$

Es lassen sich noch eine Reihe ähnlicher Formeln aufstellen, indessen kann von denselben füglich abgesehen werden. Wir können aus diesen Reihendarstellungen aber noch Darstellungen anderer Art ableiten.

Es ist:

$$\frac{1}{sin\pi\left(v-\frac{2\mu+1}{2}\tau\right)}$$

$$=\frac{2i}{e^{\pi iv}.q^{-\frac{2\mu+1}{2}}-e^{-\pi iv}.q^{\frac{2\mu+1}{2}}}=2ie^{-\pi iv}.q^{\frac{2\mu+1}{2}}\sum e^{-2m\pi iv}q^{m(2\mu+1)},$$

$$\frac{1}{sin\pi\left(v+\frac{2\mu+1}{2}\tau\right)}$$

$$=\frac{2i}{e^{\pi iv}.q^{\frac{2\mu+1}{2}}-e^{-\pi iv}q^{-\frac{2\mu+1}{2}}}=-2ie^{\pi iv}.q^{\frac{2\mu+1}{2}}\sum e^{2m\pi iv}q^{m(2\mu+1)}.$$

Durch Addition der linken Seiten erhalten wir:

$$\frac{1}{sin\pi\left(v-\frac{2\mu+1}{2}\tau\right)}+\frac{1}{sin\pi\left(v+\frac{2\mu+1}{2}\tau\right)}$$

$$=4sin\pi v.q^{\frac{2\mu+1}{2}}\frac{1+q^{2\mu+1}}{1-2q^{2\mu+1}cos\,2\pi v+q^{4\mu+2}}.$$

Die Summe der rechten Seiten dagegen nimmt die Form an:

$$4q^{\frac{2\mu+1}{2}}\sum q^{(2\mu+1)m}.sin(2m+1)\pi v.$$

Hieraus folgen unmittelbar die Darstellungen:

$$7)\quad \frac{2k.K.snu}{\pi} = 4 sin\pi v \sum \frac{q^{\frac{2\mu+1}{2}}(1+q^{2\mu+1})}{1-2q^{2\mu+1}.cos 2\pi v + q^{4\mu+2}},$$

$$8)\quad \frac{2k.K.snu}{\pi} = \sum_{-m-1}^{+m}{}_{\mu} \frac{1}{sin\pi\left(v-\frac{2\mu+1}{2}\tau\right)}.$$

Aus der letzten Darstellung folgt dann schliesslich noch nach bekannten Regeln:

$$9)\quad \frac{2k.K.snu}{\pi} = \sum_{-m-1}^{+m}{}_{\mu} \sum_{-n}^{+n}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\pi\left(v-\frac{2\mu+1}{2}\tau-\nu\right)}.$$

So haben wir für die Function ***snu*** drei neue Darstellungen gefunden. Mit den übrigen Functionen kann ganz analog verfahren werden. Wir wollen uns damit begnügen, für die Functionen ***cnu*** und ***dnu*** die entsprechenden Formeln hinzuschreiben:

$$10)\quad \frac{2k.K.cnu}{\pi} = cos\pi v \sum \frac{(-1)^{\mu} q^{\frac{2\mu+1}{2}}(1-q^{2\mu+1})}{1-2q^{2\mu+1}.cos 2\pi v + q^{4\mu+2}},$$

$$11)\quad \frac{2k.K.cnu}{\pi} = -i \sum_{-m-1}^{m}{}_{\mu} \frac{(-1)^{\mu}}{sin\pi\left(v-\frac{2\mu+1}{2}\tau\right)},$$

$$12)\quad \frac{2k.K.cnu}{\pi} = -i \sum_{-m-1}^{+m}{}_{\mu} \sum_{-n}^{n}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{\pi\left(v-\frac{2\mu+1}{2}\tau-\nu\right)}.$$

$$13)\quad \frac{2K.dnu}{\pi} = \frac{2K}{\pi} - 8 sin^2\pi v \sum \frac{(-1)^{\mu} q^{2\mu+1}\frac{1+q^{2\mu+1}}{1-q^{2\mu+1}}}{1-2q^{2\mu+1}.cos 2\pi v + q^{4\mu+2}},$$

$$14)\quad \frac{2K.dnu}{\pi} = -i \sum_{-m}^{+m}{}_{\mu} (-1)^{\mu} cotang\,\pi\left(v-\frac{2\mu+1}{2}\tau\right),$$

$$15)\quad \frac{2K.dnu}{\pi} = -i \sum_{-m}^{+m}{}_{\mu} \sum_{-n}^{+n}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\mu}}{\pi\left(v-\frac{2\mu+1}{2}\tau-\nu\right)}.$$

Dritter Abschnitt.

Die Transformation der elliptischen Functionen nebst Anwendungen.

---

§ 35.[15])

Die rationale Transformation der elliptischen Functionen für den Fall, dass $u = 0$, $u' = 0$ entspricht.

Denken wir uns die vier Thetafunctionen für ein neues Argument v' und einen neuen Modul τ' gebildet, welcher den Convergenzbedingungen Genüge leistet, so können mit ihrer Hülfe neue elliptische Functionen gebildet werden, deren Argument durch u' und deren Modul durch c bezeichnet werden möge. Die den Grössen K entsprechenden Grössen bezeichnen wir durch den Buchstaben C. Das Problem der rationalen Transformation der elliptischen Functionen lautet dann:

Es sollen die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür aufgestellt werden, dass die Functionen mit dem Argumente u' und dem Modul c sich rational durch die Functionen mit dem Argumente u und dem Modul k ausdrücken lassen unter der Bedingung, dass zwischen u und u' eine Relation von der Form besteht:

$$u' = Mu + \varepsilon.$$

Wir nennen die Functionen mit den Argumenten u und den Moduln k die ursprünglichen, die Functionen mit den Argumenten u' und den Moduln c die transformirten. Wir wollen zunächst den Fall ins Auge fassen, dass $\varepsilon = 0$ ist. Es ist nicht schwer, in diesem Falle nothwendige Bedingungen aufzustellen. In der That, vermehren wir die Argumente der ursprünglichen elliptischen Functionen um ganze Vielfache von $4K$ und $4iK'$, so bleiben sie ungeändert, es müssen also auch die entsprechenden transformirten elliptischen Functionen ungeändert bleiben. Nun folgt aber aus den früheren Untersuchungen unmittelbar, dass die hinreichenden und nothwendigen Be-

dingungen dafür, dass die elliptischen Functionen mit dem Argumente u' bei gleichbleibendem Modul den entsprechenden elliptischen Functionen mit dem Argumente u'' gleich sind, folgendermassen lauten: Es muss sein

$$u'' = u' + 4mK + 4m_1 iK',$$

wobei m und m_1 beliebige ganze Zahlen bedeuten. Also müssen die Beziehungen stattfinden:

$$1)\qquad \begin{cases} M.K = a_0 C + a_1 iC', \\ iM.K' = b_0 C + b_1 iC', \end{cases}$$

wobei a_0, a_1, b_0, b_1 einstweilen völlig beliebige ganze Zahlen bedeuten. Es folgt leicht, dass die Zahl

$$n = a_0 b_1 - a_1 b_0$$

eine positive sein muss. Es ergiebt sich das daraus, dass $\frac{iC'}{C}$ der bekannten Convergenzbedingung Genüge leisten muss, ebenso wie $\frac{iK'}{K}$. Wir nennen diese positive ganze Zahl den **Grad** der Transformation, die Zahlen a_0, a_1, b_0, b_1 die **Transformationszahlen**.

Nun ist:

$$u = \pi . \vartheta_3^2 . v = 2K . v,$$
$$u' = \pi . \vartheta_3^2(0, \tau') v' = 2C . v',$$

mithin wird:

$$C . v' = M . K . v = (a_0 C + a_1 iC')v$$

oder also:

$$2)\qquad v' = (a_0 + a_1 \tau')v.$$

Durch Division der rechten und linken Seiten der Gleichungen für $M.K$ und $iM.K'$ ergiebt sich:

$$3)\qquad \tau = \frac{b_0 + b_1 \tau'}{a_0 + a_1 \tau'}$$

und umgekehrt:

$$4)\qquad \tau' = \frac{b_0 - a_0 \tau}{a_1 \tau - b_1}.$$

Ferner ergiebt sich ohne Schwierigkeit für v' der zweite Ausdruck:

$$5)\qquad v' = \frac{nv}{b_1 - a_1 \tau}.$$

Sind also die vier Transformationszahlen gegeben, so sind vermöge dieser Beziehungen die Grössen v' und τ', mithin u' und c bekannt. Das Problem der Transformation besteht darin, nachzuweisen, dass die ihnen entsprechenden elliptischen Functionen sich rational durch die ursprünglichen ausdrücken lassen, so dass die bisher aufgestellten Bedingungen nicht nur die nothwendigen, sondern auch die hinreichenden darstellen.

§ 36.

Zusammensetzung der Transformationen. Lineare Transformation. Einführung der Repräsentanten.

Wir wollen uns jetzt zwei Transformationen nach einander ausgeübt denken. Die Zahlen der ersten bezeichnen wir durch a_0, a_1, b_0, b_1, der zweiten durch $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$. Dann lehrt eine Betrachtung der einfachsten Art, dass wir zu demselben Ziele gelangt wären, wenn wir auf die ursprünglichen Grössen eine Transformation uns ausgeübt denken, deren Zahlen lauten:

$$A_s = a_0\alpha_s + a_1\beta_s,$$
$$B_s = b_0\alpha_s + b_1\beta_s, \qquad s = 1, 2.$$

Es sind also zwei nach einander angewandte Transformationen gleichbedeutend mit einer ganz bestimmten dritten, sie setzen sich zu einer ganz bestimmten dritten zusammen. Die hierbei geltenden Gesetze können wir in übersichtlicher Weise darstellen.

Wir wollen uns ganz allgemein eine jede Transformation mit den Transformationszahlen a_0, a_1, b_0, b_1 durch die Determinante dargestellt denken:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

und diese mit dem Namen der Transformationsdeterminante bezeichnen. Dann entsteht durch Anwendung zweier beliebiger Transformationen eine dritte, deren Determinante gleich dem Producte der beiden ursprünglichen ist. Hierbei ist aber die Multiplication so auszuführen, dass die Horizontalreihen der bei der ersten Transformation auftretenden Determinante mit den Verticalreihen der zweiten multiplicirt werden. Diese Art der Multiplication soll in der Folge beibehalten werden. Hieraus folgt, dass der Grad der dritten Transformation gleich dem Producte der Grade der beiden ursprünglich vorgelegten Transformationen ist.

Eine jede Transformation, deren Grad die Einheit ist, nennen wir eine lineare.

Es ist nun nicht schwer, auf Grund der soeben aufgestellten Sätze die allgemeine Transformation durch einfachere zu ersetzen. In der That, setzen wir:

$$a_0^{(0)} = a_0, \quad a_0^{(1)} = a_1, \quad a_0^{(0)} = a_0^{(1)} l_1 + a_0^{(2)}, \ldots \quad a_0^{(m-1)} = a_0^{(m)} l_m + a_0^{(m+1)},$$
$$b_0^{(0)} = b_0, \quad b_0^{(1)} = b_1, \quad b_0^{(0)} = b_0^{(1)} l_1 + b_0^{(2)}, \ldots \quad b_0^{(m-1)} = b_0^{(m)} l_m + b_0^{(m+1)},$$

so wird eine jede Transformationsdeterminante $(a_0 b_1)$ gleich:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^{(m)} & a_0^{(m+1)} \\ b_0^{(m)} & b_0^{(m+1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_m & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} l_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dabei sind unter den Grössen $l_1, l_2, \ldots l_m$ zunächst völlig willkürliche ganze Zahlen zu verstehen. Wir können dieselben stets so bestimmen, dass:

$$a_0^{(m+1)} = 0$$

ist. In der That, hierzu haben wir nur nöthig, die Grössen l so zu bestimmen, dass die Zahlen $a_0^{(m)}$ beständig fallen mit steigendem Index vom Zeichen abgesehen. Es kann aber weiter behauptet werden, dass hierbei m stets als gerade Zahl angenommen werden kann. In der That, ist m eine ungerade Zahl, so setzen wir an Stelle der beiden Gleichungen:

$$a_0^{(m-2)} = a_0^{(m-1)} . l_{m-1} + a_0^{(m)},$$
$$a_0^{(m-1)} = a_0^{(m)} l_m$$

die drei Gleichungen:

$$a_0^{(m-2)} = a_0^{(m-1)}(l_{m-1} - 1) + a_0^{(m-1)} + a_0^{(m)},$$
$$a_0^{(m-1)} = a_0^{(m-1)} + a_0^{(m)} - a_0^{(m)},$$
$$a_0^{(m-1)} + a_0^{(m)} = - a_0^{(m)}(- l_m - 1).$$

Damit ist die Richtigkeit der Behauptung nachgewiesen.

Nun ist aber:

$$\begin{vmatrix} l & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l' & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l' & 1 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt dann, dass die allgemeine Transformationsdeterminante als Product einer Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

und Determinanten von der Form:

$$\begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l' & 1 \end{vmatrix}$$

dargestellt werden kann. Die erste Determinante definirt eine Transformation n^{ten} Grades und zwar muss $a_0 b_1$ gleich n sein, die anderen Determinanten dagegen definiren lineare Transformationen. Wir finden daher das Resultat, dass eine beliebige Transformation n^{ten} Grades ersetzt werden kann durch eine specielle zu der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

gehörende Transformation n^{ten} Grades und eine Reihe linearer Transformationen specieller Natur.

Besonders einfach lässt sich dieses Resultat im Falle $n = 1$ darstellen. In der That, in diesem Falle erhalten wir als Transformationen,

aus denen sich alle zusammensetzen lassen müssen, die zu den Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l' & 1 \end{vmatrix}$$

gehörenden, wobei

$$a_0 b_1 = 1$$

sein muss. Unter solchen Umständen muss

$$a_0 = b_1 = 1$$

oder

$$a_0 = b_1 = -1$$

sein.

Bleiben wir bei dem ersten Falle stehen, so erhalten wir als Transformationen, aus denen sich die allgemeine zusammensetzen lässt, die zu den Determinanten gehörenden:

$$\begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l' & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l'-1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l'+1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt, dass die Transformationen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l' & 1 \end{vmatrix}$$

sich sämmtlich aus den Transformationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{vmatrix}$$

zusammensetzen lassen. Im zweiten Falle gestaltet sich die Sache ähnlich, wenn wir nur die Transformation

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

mit hinzunehmen. An Stelle dieser letzten können wir aber die Transformation wählen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},$$

da die Beziehung besteht:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ferner ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -l & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt dann sofort der

Lehrsatz: Eine jede lineare Transformation kann durch wiederholte Zusammensetzung der Transformationen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

gebildet werden. Wir nennen die letzteren Fundamentaltransformationen.

Ein ähnlicher Satz gilt für die Transformationen n^{ten} Grades.

Nennen wir zwei Transformationsdeterminanten oder auch zwei Transformationen (a_0, b_1) und (a'_0, b'_1) einander äquivalent, wenn eine Gleichung besteht:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_0 & a'_1 \\ b'_0 & b'_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix},$$

wobei die Determinante (α_0, β_1) zu einer linearen Transformation gehört, so folgt der

Lehrsatz: Eine jede Transformation n^{ten} Grades ist einer andern (a_0, b_1) äquivalent, bei welcher die Beziehungen stattfinden:

$$a_1 = 0,$$

$$a_0 b_1 = n, \quad a_0 \text{ und } b_1 \text{ positiv},$$

$$b_0 \text{ positiv oder Null und kleiner als } b_1.$$

Es braucht nur die dritte Behauptung bewiesen zu werden. Dieselbe folgt unmittelbar aus der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 - r b_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{vmatrix}.$$

Ebenso einfach folgt der

Lehrsatz: Zwei Determinanten der angegebenen Form können nie einander äquivalent sein, ohne identisch zu sein.

Der Begriff der Aequivalenz setzt eine bestimmte Reihenfolge in der Anwendung der Transformationen voraus. Zuerst ist die Transformation n^{ten} Grades, dann die lineare Transformation anzuwenden. Sehen wir von der Reihenfolge ab, fragen wir nur nach der Zusammensetzung allgemeiner Transformationen n^{ten} Grades aus einfacheren und

linearen Transformationen, so lässt sich eine weitere Reduction vornehmen und wir finden ohne Mühe das Resultat, dass alle Transformationen n^{ten} Grades sich aus der einen — der Haupttransformation —

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$$

und linearen zusammensetzen lassen, vorausgesetzt, dass nicht alle Zahlen einen gemeinsamen Factor haben. Für unsere Zwecke tritt dieses Resultat aber vor dem früheren zurück. Haben alle vier Transformationszahlen einen gemeinsamen Theiler, so kann derselbe leicht abgesondert werden, denn es ist ja:

$$\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{vmatrix}.$$

Man nennt den speciellen Fall der Transformation, welcher durch die Determinante repräsentirt wird:

$$\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix}$$

die Multiplication der elliptischen Functionen.

An Stelle der Transformation:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$$

kann auch die Transformation

$$\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

gewählt werden, die mit der ersten durch die Gleichung zusammenhängt:

$$\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wir wollen nun von jetzt an die Bezeichnung gebrauchen, dass alle Transformationen n^{ten} Grades in eine Classe gehören, deren Determinanten einander äquivalent sind. Dann folgt, dass die Anzahl dieser Classen eine endliche Zahl ist und dass wir als Repräsentanten einer jeden derselben eine Determinante der vorhin definirten Art setzen können.

Diese Determinanten wollen wir schreiben:

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ \xi & t_1 \end{vmatrix}.$$

Für dieselben wird:

$$v' = tv, \quad \tau' = \frac{t\tau - \xi}{t_1}.$$

Die Zahl dieser Classen ist leicht zu bestimmen. t_1 kann jeden Factor von n bedeuten, 1 und n eingeschlossen, ξ nimmt bei einem vorgelegten t_1 genau t_1 Werthe an, also ist die Classenanzahl gleich der Summe der Divisoren von n. Setzen wir:

$$n = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots,$$

so folgt demnach als Zahl der nicht äquivalenten Classen für eine Transformation n^{ten} Grades:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \cdots$$

Ist n eine Primzahl, so ist die Classenanzahl gleich $n+1$.

§ 37.[16)]

Die entsprechende rationale Transformation der Thetafunctionen, insbesondere die lineare.

Die elliptischen Functionen sind Quotienten von Thetafunctionen. Es liegt unter solchen Umständen nahe zu untersuchen, ob es möglich ist, die Thetafunctionen $\vartheta_{gh}(v', \tau')$ durch die ursprünglichen auszudrücken. Es zeigen sich hierbei zunächst keine einfachen Beziehungen. Wir kommen aber zu solchen, wenn wir die Function zu Grunde legen:

$$1) \quad \Pi_{gh}(v) = \Pi_\lambda(v) = e^{\pi i (a_0 + a_1 \tau') a_1 v^2} \vartheta_{gh}(v', \tau') = e^{\pi i (a_0 + a_1 \tau') a_1 v^2} \vartheta_\lambda(v', \tau'),$$

wobei v' und τ' die früher angegebene Bedeutung haben. Diese Function genügt dann, wie man sich durch eine leichte Rechnung überzeugt, den beiden Gleichungen:

$$2) \quad \begin{cases} \Pi_{gh}(v+1) = (-1)^{\mathfrak{g}} \Pi_{gh}(v), \\ \Pi_{gh}(v+\tau) = (-1)^{\mathfrak{h}} e^{-n\pi i(2v+\tau)} \Pi_{gh}(v), \end{cases}$$

wobei gesetzt ist:

$$\mathfrak{g} = g a_0 + h a_1 + a_0 a_1,$$
$$\mathfrak{h} = g b_0 + h b_1 + b_0 b_1.$$

Da die Function überdies eine ganze transcendente Function von v ist, so folgt, dass wir es mit einer Thetafunction n^{ter} Ordnung zu thun haben, welche nach bekannten Regeln durch die ursprünglich vorgelegten Thetafunctionen ganz und rational ausgedrückt werden kann. In diesen Ausdrücken tritt eine Anzahl von Constanten linear auf. Die ganze Schwierigkeit in der Transformationstheorie der Thetafunctionen besteht in der Untersuchung dieser Constanten. Wir wollen diese Untersuchung zunächst im Falle einer linearen Transformation durchführen.

Nach den früheren Untersuchungen könnten wir uns auf die Untersuchung zweier specieller linearer Transformationen beschränken. Die Formenmannigfaltigkeit tritt aber in diesem Falle klarer und einfacher

zu Tage, wenn wir das Problem in seiner Allgemeinheit behandeln. Wir nehmen dazu zunächst die Function $\Pi_3(v)$, welche den Gleichungen Genüge leistet:

$$\Pi_3(v+1) = (-1)^{a_0 a_1}\Pi_3(v),$$
$$\Pi_3(v+\tau) = (-1)^{b_0 b_1} e^{-\pi i(2v+\tau)}\Pi_3(v).$$

Hieraus folgt:

$$\Pi_3(v) = c\,.\,\vartheta_{a_0 a_1,\, b_0 b_1}(v,\tau),$$

wobei c eine von v unabhängige Constante bedeutet. Durch Substitution halber Perioden können wir hieraus die entsprechenden Formeln für die anderen Π-Functionen ableiten.

In der That, vermehren wir v' um:

$$\frac{g'\tau'+h'}{2},$$

so wird die Grösse v vermehrt um:

$$\frac{g\tau+h}{2},$$

wobei ist:

$$g = g' a_0 - h' a_1,$$
$$h = -g' b_0 + h' b_1.$$

Nehmen wir nun die Formeln hinzu:

$$\vartheta_{g\, h+2}(v) = e^{g\pi i}\vartheta_{gh}(v),$$
$$\vartheta_{g+2\, h}(v) = \vartheta_{gh}(v),$$
$$\vartheta_{gh}\left(v+\frac{g'\tau+h'}{2},\tau\right) = \vartheta_{g+g',\, h+h'}(v,\tau)\,(-1)^{gh'}\, i^{g'(h+h')}\, e^{-\frac{\pi i g'}{2}\left(2v+\frac{g'}{2}\tau\right)},$$

so folgt:

$$\Pi_{g'h'}(v) = c\,.\,e^{\frac{i\pi}{2}(g'h'-\mathfrak{g}\mathfrak{h})-\frac{i\pi}{4}\omega}\,\vartheta_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}(v,\tau), \tag{3}$$

wobei gesetzt ist:

$$\omega = g'^2 a_0 b_0 + h'^2 a_1 b_1 + 2g'h' b_0 a_1 + 2g' b_0 a_0 a_1 + 2h' b_1 a_0 a_1 + 2a_0 a_1 b_0 b_1.$$

Die Constante hat für alle Functionen den nämlichen Werth; ferner ist:

$$\mathfrak{g} = g' a_0 + h' a_1 + a_0 a_1,$$
$$\mathfrak{h} = g' b_0 + h' b_1 + b_0 b_1.$$

Die Zahlen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ können einen jeden ganzzahligen Werth annehmen. Setzt man:

$$\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g}' \mod 2, \quad \mathfrak{h} \equiv \mathfrak{h}' \mod 2,$$

und nimmt an, dass die Zahlen $\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'$ die Werthe 0 und 1 annehmen sollen, so nimmt der Factor von

$$c\,.\,e^{-\frac{i\pi}{4}\omega}\,\vartheta_{\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'}(v)$$

die Form an:

$$e^{\frac{i\pi}{2}\mathfrak{h}(\mathfrak{g}'-\mathfrak{g})+\frac{i\pi}{2}(\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'-g'h')}.$$

Unter solchen Umständen ist das Problem der linearen Transformation auf das Problem zurückgeführt, die allen Thetafunctionen gemeinsame Constante c zu bestimmen. Dieses Problem ist kein einfaches und auf mannigfachem Wege von verschiedenen Autoren gelöst worden. Für unsere Zwecke genügt es, den Werth von c^2 zu kennen. Dieser Werth ist auf einfache Weise zu bestimmen. Nehmen wir dazu an, dass für eine beliebige lineare Transformation die Beziehungen stattfinden:

$$\begin{aligned}
F.\vartheta_3(v', \tau') &= c.\varepsilon_3.\vartheta_{\alpha_3}(v, \tau),\\
F.\vartheta_2(v', \tau') &= c.\varepsilon_2.\vartheta_{\alpha_2}(v, \tau),\\
F.\vartheta_1(v', \tau') &= c.\varepsilon_1.\vartheta_1(v, \tau),\\
F.\vartheta_0(v', \tau') &= c.\varepsilon_0.\vartheta_{\alpha_0}(v, \tau),\\
F &= e^{i\pi(a_0+a_1\tau')a_1 v^2},
\end{aligned}$$

wobei unter $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3$ die drei Zahlen $0, 2, 3$ nur in anderer Reihenfolge zu verstehen sind, so sind die vier Grössen $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_0$ nach dem Früheren vollkommen bestimmt. Die dritte Gleichung differenziren wir rechts und links nach v und setzen nach erfolgter Differentiation

$$v = v' = 0.$$

Berücksichtigen wir dann die Beziehung:

$$\vartheta'_1 = \pi\vartheta_0.\vartheta_2.\vartheta_3,$$

so erhalten wir die Beziehung:

$$\vartheta_0(0, \tau')\vartheta_2(0, \tau')\vartheta_3(0, \tau')(a_0 + a_1\tau') = c.\varepsilon_1\vartheta_0(0, \tau)\vartheta_2(0, \tau)\vartheta_3(0, \tau)$$

oder also:

$$c^2(a_0 + a_1\tau')\varepsilon_0.\varepsilon_2.\varepsilon_3 = \varepsilon_1,$$

$$4)\qquad c^2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0.\varepsilon_2.\varepsilon_3(a_0 + a_1\tau')}.$$

§ 38.

Die lineare Transformation der Thetafunctionen. Specielle Discussion.

Wir wollen nun die allgemeinen Resultate etwas specieller untersuchen. Zunächst folgt aus den vorhin aufgestellten Formeln, dass zwei Systemen von Transformationszahlen a_0, a_1, b_0, b_1, die nach dem Modul 2 einander congruent sind, dieselben ursprünglichen Thetafunctionen entsprechen. Wir werden also die wesentlich von einander verschiedenen Fälle der linearen Transformation erhalten, indem wir die Mannigfaltigkeit der Zahlen a_0, b_0, a_1, b_1, die der Gleichung:

$$a_0 b_1 - b_0 a_1 = 1$$

Genüge leisten, nach dem Modul 2 untersuchen. Es ergeben sich hierbei sechs Fälle, die wir durch die folgende Tabelle darstellen können:

	$a_0 \equiv$	$a_1 \equiv$	$b_0 \equiv$	$b_1 \equiv$
I.	1	0	0	1
II.	0	1	1	0
III.	1	1	0	1
IV.	1	1	1	0
V.	1	0	1	1
VI.	0	1	1	1

In jedem dieser sechs Fälle können wir die fertigen Formeln unmittelbar vermöge der von uns entwickelten allgemeinen Formel hinschreiben. Wir wollen dabei die Constante, die allen vier Thetafunctionen gemeinsam ist, etwas modificiren, so wie es aus den folgenden Formeln ersichtlich ist. Es geschieht das, um zu denselben Formeln zu gelangen, die Koenigsberger in seinem Werke über die Transformation der elliptischen Functionen aufgestellt hat. Wir erhalten die folgenden Resultate:

I. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \mod 2.$

$$F . \vartheta_3(v', \tau') = c \vartheta_3(v, \tau),$$

$$F . \vartheta_0(v', \tau') = c . e^{\frac{i\pi a_0 a_1}{4}} \vartheta_0(v, \tau),$$

$$F . \vartheta_1(v', \tau') = c . e^{-\frac{i\pi}{4}(a_0 b_0 - a_0 a_1 + 2a_0 - 2)} \vartheta_1(v, \tau),$$

$$F . \vartheta_2(v', \tau') = c . e^{-\frac{i\pi}{4} a_0 b_0} \vartheta_2(v, \tau).$$

II. $a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \mod 2.$

$$F . \vartheta_3(v', \tau') = c . e^{\frac{i\pi a_0 a_1}{4}} \vartheta_3(v, \tau),$$

$$F . \vartheta_0(v', \tau') = c . e^{-\frac{i\pi}{4}(a_0 b_0 + a_1 b_1)} \vartheta_2(v, \tau),$$

$$F . \vartheta_1(v', \tau') = c . e^{-\frac{i\pi}{4}(a_0 b_0 + a_1 b_1 - a_0 a_1 - 2a_0 - 2b_0 + 4)} \vartheta_1(v, \tau),$$

$$F . \vartheta_2(v', \tau') = c . \vartheta_0(v, \tau).$$

Wählen wir die speciellen Zahlen:

$$a_0 = 0,\ a_1 = -1,\ b_0 = 1,\ b_1 = 0,$$

so wird:

$$\tau' = -\frac{1}{\tau},\ v' = \frac{v}{\tau} = -\tau' v.$$

III. $a_0 \equiv 1,\ a_1 = 1,\ b_0 \equiv 0,\ b_1 = 1 \ mod\ 2.$

$$F.\vartheta_3(v', \tau') = c.e^{-\frac{i\pi a_0 b_0}{4}}\vartheta_2(v, \tau),$$

$$F.\vartheta_0(v', \tau') = c.e^{\frac{i\pi a_0 a_1}{4}}\vartheta_0(v, \tau),$$

$$F.\vartheta_1(v', \tau') = c.e^{-\frac{i\pi}{4}(a_0 b_0 - a_0 a_1 + 2a_0 - 2)}\vartheta_1(v, \tau),$$

$$F.\vartheta_2(v', \tau') = c.\vartheta_3(v, \tau).$$

Wählen wir die speciellen Zahlen:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1,$$

so wird:

$$\tau' = \frac{\tau}{1-\tau},\ v' = (1+\tau')v.$$

IV. $a_0 \equiv 1,\ a_1 = 1,\ b_0 = 1,\ b_1 = 0 \ mod\ 2.$

$$F.\vartheta_3(v', \tau') = c.e^{-\frac{i\pi a_0 b_0}{4}}\vartheta_2(v, \tau),$$

$$F.\vartheta_0(v', \tau') = c.e^{\frac{i\pi a_0 a_1}{4}}\vartheta_3(v, \tau),$$

$$F.\vartheta_1(v', \tau') = c.e^{-\frac{i\pi}{4}(a_0 b_0 - a_0 a_1 + 2a_0 - 2)}\vartheta_1(v, \tau),$$

$$F.\vartheta_2(v', \tau') = c.\vartheta_0(v, \tau).$$

Wählen wir die speciellen Zahlen:

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ b_0 = 1,\ b_1 = 0,$$

so wird:

$$\tau' = \frac{\tau - 1}{\tau},\ v' = \frac{v}{\tau} = (1-\tau')v.$$

V. $a_0 \equiv 1,\ a_1 = 0,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 1 \ mod\ 2.$

$$F.\vartheta_3(v', \tau') = c.\vartheta_0(v, \tau),$$

$$F.\vartheta_0(v', \tau') = c.e^{\frac{i\pi a_0 a_1}{4}}\vartheta_3(v, \tau),$$

$$F.\vartheta_1(v', \tau') = c.e^{-\frac{i\pi}{4}(a_0 b_0 - a_0 a_1 + 2a_0 - 2)}\vartheta_1(v, \tau),$$

$$F.\vartheta_2(v', \tau') = c.e^{-\frac{i\pi a_0 b_0}{4}}\vartheta_2(v, \tau).$$

Wählen wir die speciellen Zahlen:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ b_0 = -1,\ b_1 = 1,$$

so wird:

$$\tau' = \tau + 1,\ v' = v.$$

VI. $a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \mod 2.$

$$F \cdot \vartheta_3(v', \tau') = c \cdot e^{\frac{i\pi a_0 a_1}{4}} \vartheta_0(v, \tau),$$

$$F \cdot \vartheta_0(v', \tau') = c \cdot e^{-\frac{i\pi}{4}(a_0 b_0 + a_1 b_1 - 2 a_0 b_1)} \vartheta_2(v, \tau),$$

$$F \cdot \vartheta_1(v', \tau') = c \cdot e^{-\frac{i\pi}{4}(a_0 b_0 + a_1 b_1 - a_0 a_1 - 2 a_0 - 2 b_0 + 4)} \vartheta_1(v, \tau),$$

$$F \cdot \vartheta_2(v', \tau') = c \cdot \vartheta_3(v, \tau).$$

Wählen wir die speciellen Zahlen:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad b_0 = -1, \quad b_1 = 1,$$

so wird:

$$\tau' = \frac{1}{1 - \tau}, \quad v' = \frac{v}{1 - \tau} = \tau' \cdot v.$$

Es ist klar, dass der zweite und fünfte Fall die beiden linearen Transformationen in sich enthalten, aus denen wir alle zusammengesetzt haben, und dass wir die sämmtlichen Resultate auch durch mehrfache Anwendung dieser beiden Transformationen hätten ableiten können. Ebenso leicht folgt aber, dass wir dasselbe Resultat auch durch wiederholte Anwendung der Transformationen des zweiten und dritten Falles hätten ableiten können.

§ 39.

Die lineare Transformation der elliptischen Functionen.

Indem wir die lineare Transformation der Thetafunctionen abgeleitet haben, haben wir zu gleicher Zeit im Wesentlichen die lineare Transformation der elliptischen Functionen erledigt. Jedenfalls finden wir den

Lehrsatz: Die transformirten elliptischen Functionen lassen sich im Falle der linearen Transformation rational durch die ursprünglichen darstellen.

Ueber die Constanten ist hierbei nichts ausgesagt. Man überzeugt sich leicht, dass dieselben sich rational aus achten Einheitswurzeln und den ursprünglichen Thetaquotienten für die Nullwerthe der Argumente ausdrücken lassen.

Die einzige Schwierigkeit, die hierbei auftritt, besteht in der Bestimmung des Argumentes der transformirten Thetafunctionen, der Grösse u'. Dieselbe kann leicht gehoben werden. In der That, es ist:

$$u' = \pi \vartheta_3^2(0, \tau') v' = \pi \vartheta_3^2(0, \tau')\,(a_0 + a_1 \tau') v$$

oder also:

$$u' = \frac{\vartheta_3^2(0,\tau')}{\vartheta_3^2(0,\tau)}(a_0 + a_1\tau')u$$

oder mit Bezug auf die früher gewonnenen Resultate:

I. $$u' = \frac{\vartheta_{\alpha_1}^2(0,\tau)}{\vartheta_3^2(0,\tau)}\,\frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_2}\,u.$$

Damit ist u' eindeutig bestimmt.

Es hat nun keinen Zweck, für die elliptischen Functionen die allgemeine Formel aufzustellen oder auch nur die sechs Fälle in ihrer Allgemeinheit zu behandeln. Es genügt für die späteren Zwecke vollkommen, wenn wir die vorhin angegebenen speciellen Fälle ins Auge fassen, wobei dann der erste Fall ganz herausfällt.

Die den Grössen k und k' entsprechenden transformirten Grössen bezeichnen wir durch c und c', dann erhalten wir die folgenden Resultate:

II. $a_0 = 0,\ a_1 = -1,\ b_0 = 1,\ b_1 = 0,\quad \sqrt{c} = \sqrt{k'},\ \sqrt{c'} = \sqrt{k},\ u' = iu.$

$$sn(iu,k') = i\frac{sn(u,k)}{cn(u,k)},$$

$$cn(iu,k') = \frac{1}{cn(u,k)},$$

$$dn(iu,k') = \frac{dn(u,k)}{cn(u,k)}.$$

III. $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1.$

$$\sqrt{c} = \sqrt{\frac{1}{k}},\quad \sqrt{c'} = e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{k'}{k}},\quad u' = ku,$$

$$sn\left(ku,\frac{1}{k}\right) = k\,sn(u,k),$$

$$cn\left(ku,\frac{1}{k}\right) = dn(u,k),$$

$$dn\left(ku,\frac{1}{k}\right) = cn(u,k).$$

IV. $a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ b_0 = 1,\ b_1 = 0.$

$$\sqrt{c} = e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{k'}{k}},\quad \sqrt{c'} = \sqrt{\frac{1}{k}},\quad u' = -iku,$$

$$sn\left(ku,\frac{ik'}{k}\right) = -ik\frac{sn(iu,k)}{dn(iu,k)},$$

$$cn\left(ku,\frac{ik'}{k}\right) = \frac{1}{dn(iu,k)},$$

$$dn\left(ku,\frac{ik'}{k}\right) = \frac{cn(iu,k)}{dn(iu,k)}.$$

V. $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ b_0 = -1,\ b_1 = 1.$

$$\sqrt{c} = e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{k}{k'}},\quad \sqrt{d} = \sqrt{\frac{1}{k'}},\quad u' = k'u,$$

$$sn\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = k'\frac{sn(u,k)}{dn(u,k)},$$

$$cn\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{cn(u,k)}{dn(u,k)},$$

$$dn\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{dn(u,k)}.$$

VI. $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ b_0 = -1,\ b_1 = 1.$

$$\sqrt{c} = \sqrt{\frac{1}{k'}},\quad \sqrt{d} = e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{k}{k'}},\quad u' = ik'u,$$

$$sn\left(ik'u, \frac{1}{k'}\right) = ik'\frac{sn(u,k)}{cn(u,k)},$$

$$cn\left(ik'u, \frac{1}{k'}\right) = \frac{dn(u,k)}{cn(u,k)},$$

$$dn\left(ik'u, \frac{1}{k'}\right) = \frac{1}{cn(u,k)}.$$

Damit sind die Hauptformeln aus der Theorie der linearen Transformation der elliptischen Functionen vollkommen entwickelt.

§ 40.[17])

Die Transformation zweiten Grades der Thetafunctionen.

Bei der Transformation zweiten Grades können wir uns auf die drei Repräsentanten beschränken:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zunächst fassen wir ganz allgemein eine Transformation ins Auge, bei welcher $a_1 = 0$ ist.

Für dieselbe setzen wir:

$$\Pi_{gh}(v) = \vartheta_{gh}(v', \tau'),$$

dann folgen die Gleichungen:

$$\Pi_{gh}(v+1) = (-1)^{\mathfrak{g}}\Pi_{gh}(v),$$

$$\Pi_{gh}(v+\tau) = (-1)^{\mathfrak{h}}e^{-2\pi i(2v+\tau)}\Pi_{gh}(v),$$

wobei:

$$\mathfrak{g} = g \cdot a_0,$$
$$\mathfrak{h} = g \cdot b_0 + h \cdot b_1 + b_0 \cdot b_1,$$
$$a_0 b_1 - b_0 a_1 = 2$$

ist.

Hieraus folgt, wie wir auch schon allgemein bewiesen hatten, dass die sämmtlichen transformirten Thetafunctionen Thetafunctionen zweiter Ordnung mit der Charakteristik $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sind und daher durch die ursprünglichen in bekannter Weise ausgedrückt werden können. Wir fragen zunächst, wann wird die Charakteristik $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ mit der Charakteristik $(0, 0)$ zusammenfallen? Diese Frage kommt auf die Lösung der Congruenzen hinaus:

$$\left.\begin{aligned} a_0 x &\equiv 0 \\ b_0 x + b_1 y + b_0 b_1 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} mod\, 2,$$

wobei ist:

$$a_0 b_1 - b_0 a_1 = 2.$$

Man überzeugt sich leicht, dass bei beliebig vorgelegten Werthen von a_0, b_0, b_1 immer zwei und nur zwei Systeme x, y gefunden werden können, welche diesen Gleichungen Genüge leisten. Genauer specialisirt ergeben sich für die drei Arten von Repräsentanten die Werthe:

$$g = 0,\ h = \varepsilon,\ \varepsilon = 1, 0,$$
$$g = 0,\ h = \varepsilon,\ \varepsilon = 1, 0,$$
$$g = \varepsilon,\ h = 0,\ \varepsilon = 1, 0.$$

Mit anderen Worten wir finden, dass von den zwölf transformirten Thetafunctionen sechs die Charakteristik $(0, 0)$ haben, und zwar sind es die Functionen:

$$\vartheta_3\left(v, \frac{\tau}{2}\right),\ \vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{2}\right),\ \vartheta_3\left(v, \frac{\tau+1}{2}\right),\ \vartheta_0\left(v, \frac{\tau+1}{2}\right),\ \vartheta_3(2v, 2\tau),\ \vartheta_2(2v, 2\tau).$$

Dieselben lassen sich also als lineare homogene Functionen der Quadrate zweier beliebig gewählter der vier Thetafunctionen darstellen. Um die einfachsten Darstellungen zu erhalten, stellen wir die folgende Betrachtung an.

Vermehren wir v um:

$$\frac{1}{2} m + \frac{1}{2} n \tau,$$

wobei m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten, so wird v' vermehrt um:

$$\frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \nu \tau',$$

wobei gesetzt ist:

$$\mu = m a_0 + n b_0,$$
$$\nu = n b_1.$$

Hieraus folgt, dass es immer zwei Substitutionen halber Perioden giebt, welche eine beliebige transformirte Thetafunction in sich überführen und zwar sind es für die drei am Anfange des Paragraphen näher skizzirten Fälle die Werthe:

$$m = 0, n = \varepsilon, \ \varepsilon = 1, 0,$$

$$m = \varepsilon, \ n = \varepsilon, \ \varepsilon + \varepsilon_1 \equiv 0 \mod 2,$$

$$m = \varepsilon, \ n = 0, \ \varepsilon = 0, 1.$$

Hieraus folgt ferner, dass die beiden übrig bleibenden Substitutionen halber Perioden dann eine jede der transformirten Thetafunctionen in eine und dieselbe andere transformirte Function überführen. Es empfiehlt sich nun, zur Darstellung einer jeden der sechs transformirten Thetafunctionen ein Paar ursprünglicher Thetafunctionen zu nehmen, welche durch die entsprechenden Substitutionen halber Perioden in einander übergehen. Es sind dann bei einer jeden der sechs Functionen nur noch zwei Möglichkeiten vorhanden.

Nehmen wir zunächst die Function:

$$\vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{2}\right),$$

so gehören zu ihr die beiden Paare $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$ und $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_2(v)$. Wir wollen das erste nehmen, so folgt:

$$\vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{2}\right) = c_1 \vartheta_0^2(v) + c_2 \vartheta_1^2(v)$$

oder da $c_1 = c_2$ sein muss:

$$\vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{2}\right) = c[\vartheta_0^2(v) + \vartheta_1^2(v)].$$

Hieraus folgt:

$$c = \frac{\vartheta_0\left(0, \frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0^2}.$$

Aus der Productform der Thetafunctionen folgt aber unmittelbar, dass wir hierfür schreiben können:

$$c = \frac{1}{\vartheta_3\left(0, \frac{\tau}{2}\right)}$$

oder also wir erhalten die Gleichung:

$$1) \qquad \vartheta_3\left(0, \frac{\tau}{2}\right) \vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_0^2(v) + \vartheta_1^2(v).$$

Durch Substitution halber Perioden folgt hieraus:

$$2)\qquad \vartheta_3\left(0, \frac{\tau}{2}\right)\vartheta_3\left(v, \frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_3^2(v) + \vartheta_2^2(v).$$

Genau so einfach sind die anderen Fälle zu untersuchen. Da keine irgendwie neuen principiellen Gesichtspunkte hinzutreten, so könne wir uns darauf beschränken, die fertigen Formeln hinzuschreiben.

Es ist:

$$3)\qquad \begin{cases} \vartheta_3\left(0, \frac{\tau-1}{2}\right)\vartheta_3\left(v, \frac{\tau-1}{2}\right) = \vartheta_0^2(v, \tau) - i\vartheta_2^2(v, \tau), \\ \vartheta_3\left(0, \frac{\tau-1}{2}\right)\vartheta_0\left(v, \frac{\tau-1}{2}\right) = \vartheta_3^2(v, \tau) - i\vartheta_1^2(v, \tau), \\ 2\vartheta_3(0, 2\tau)\vartheta_2(2v, 2\tau) = \vartheta_2^2(v) - \vartheta_1^2(v), \\ 2\vartheta_3(0, 2\tau)\vartheta_3(2v, 2\tau) = \vartheta_3^2(v) + \vartheta_0^2(v). \end{cases}$$

Auf diesem Wege sind sechs der zwölf transformirten Thetafunctionen erledigt. Die sechs anderen gruppiren sich zu je zwei, so zwar, dass dieselben zu je einer der noch übrigbleibenden Charakteristiken gehören.

Da sie entweder gerade oder ungerade sind, so folgt, dass sie nur noch eine Constante willkürlich in sich enthalten, deren Bestimmung keinerlei Schwierigkeiten verursacht. Wir können unter solchen Umständen wohl die fertigen Formeln hinschreiben:

$$4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1\left(v, \frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_2\left(0, \frac{\tau}{2}\right)} = \dfrac{\vartheta_1(v)\,.\,\vartheta_0(v)}{\vartheta_2\,.\,\vartheta_3}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta_2\left(v, \frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_2\left(0, \frac{\tau}{2}\right)} = \dfrac{\vartheta_2(v)\,.\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_2\,.\,\vartheta_3}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta_1\left(v, \frac{\tau-1}{2}\right)}{\vartheta_2\left(0, \frac{\tau-1}{2}\right)} = \dfrac{\vartheta_1(v)\,.\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_0\,.\,\vartheta_2}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta_2\left(v, \frac{\tau-1}{2}\right)}{\vartheta_2\left(0, \frac{\tau-1}{2}\right)} = \dfrac{\vartheta_2(v)\,.\,\vartheta_0(v)}{\vartheta_0\,.\,\vartheta_2}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta_1(2v, 2\tau)}{\vartheta_0(0, 2\tau)} = \dfrac{\vartheta_1(v)\,.\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_0\,.\,\vartheta_3}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta_0(2v, 2\tau)}{\vartheta_0(0, 2\tau)} = \dfrac{\vartheta_0(v)\,.\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_0\,.\,\vartheta_3}. \end{cases}$$

§ 41.

Die Transformation zweiten Grades der elliptischen Functionen.

Aus der Transformation der Thetafunctionen folgt sofort die Transformation der elliptischen Functionen. Die einzige Schwierigkeit besteht wieder nur in der Berechnung des Argumentes u' und des Moduls c der transformirten Functionen. Diese Berechnung kann aber unmittelbar aus den Formeln des vorigen Paragraphen erfolgen, wenn wir wieder die Relationen erwägen:

$$u' = \frac{\vartheta_3^2(0,\tau')}{\vartheta_3^2(0,\tau)}(a_0 + a_1\tau')u,$$

$$c = \frac{\vartheta_2^2(0,\tau')}{\vartheta_3^2(0,\tau')}.$$

Jedenfalls ergiebt sich auch bei der Transformation zweiten Grades das Resultat, dass die transformirten elliptischen Functionen sich rational durch die ursprünglichen darstellen lassen.

Wir wollen nun die fertigen Formeln für die drei Transformationen aufstellen.

$$\text{I. } a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ b_0 = 0,\ b_1 = 2.$$

$$c = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad u' = (1+k)u,$$

$$sn(u', c) = \frac{(1+k)\,sn\,u}{1 + k\,sn^2 u},$$

$$cn(u', c) = \frac{cn\,u\,.\,dn\,u}{1 + k\,sn^2 u},$$

$$dn(u', c) = \frac{1 - k\,sn^2 u}{1 + k\,sn^2 u}.$$

Diese Formeln enthalten die sogenannte Gauss'sche Transformation in sich.

$$\text{II. } a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ b_0 = 1,\ b_1 = 2.$$

$$c = \frac{2\sqrt{kk'i}}{k + k'i},\quad u' = (k' - ik)u,$$

$$sn(u', c) = \frac{(k' - ik)\,sn\,u\,.\,dn\,u}{1 - k(k + ik')\,sn^2 u},$$

$$cn(u', c) = \frac{cn\,u}{1 - k(k + ik')\,sn^2 u},$$

$$dn(u', c) = \frac{1 - k(k - ik')\,sn^2 u}{1 - k(k + ik')\,sn^2 u}.$$

III. $a_0 = 2, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1.$

$$c = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad u' = (1+k')u,$$

$$sn(u', c) = (1+k')\,\frac{snu\,.\,cnu}{dnu},$$

$$cn(u', c) = \frac{1-(1+k')sn^2u}{dnu},$$

$$dn(u', c) = \frac{1-(1-k')sn^2u}{dnu}.$$

Diese Formeln enthalten die sogenannte Landen'sche Transformation in sich.

Um die sämmtlichen verschiedenen analytischen Formen der Transformationen zweiten Grades herzuleiten, müssten die sechs früher behandelten linearen Transformationen auf jeden der drei Repräsentanten angewendet werden. Man darf sich aber darauf beschränken, die drei Formen anzugeben, die durch Anwendung des zweiten der sechs linearen Transformationsfälle hervorgehen. In der That, es war gezeigt worden, dass die linearen Transformationen aus dem eben bezeichneten und demjenigen Normalfall sich herleiten lassen, der den Integralmodul in den reciproken verwandelt. Dieser liefert jedoch keine neuen analytischen Formen der Transformation zweiten Grades, da snu in sich, cnu in dnu und umgekehrt übergeht.

Der Vollständigkeit halber mögen diese neun Formeln wirklich angegeben werden.

I. $c = \frac{1-k}{1+k}, \quad u' = (1+k)iu,$

$$sn(u', c) = \frac{i(1+k)snu}{cnu\,.\,dnu},$$

$$cn(u', c) = \frac{1+ksn^2u}{cnu\,.\,dnu},$$

$$dn(u', c) = \frac{1-k\,.\,sn^2u}{cnu\,.\,dnu}.$$

II. $c = \frac{k+ik'}{k-ik'}, \quad u' = (k-ik')u,$

$$sn(u', c) = \frac{(k-ik')snu\,.\,dnu}{cnu},$$

$$cn(u', c) = \frac{1-(k-ik')ksn^2u}{cnu},$$

$$dn(u', c) = \frac{1-(k+ik')ksn^2u}{cnu}.$$

$$\text{III. } c = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \quad u' = (1+k')iu,$$

$$sn(u', c) = \frac{i(1+k')snu.cnu}{1-(1+k')sn^2u},$$

$$cn(u', c) = \frac{dnu}{1-(1+k')sn^2u},$$

$$dn(u', c) = \frac{1-(1-k')sn^2u}{1-(1+k')sn^2u}.$$

§ 42.[18])

Darstellung der Differentialquotienten der elliptischen Functionen nach den Argumenten.

Wir wollen die Transformationstheorie zunächst unterbrechen, um einige Anwendungen der bisher angestellten Betrachtungen auf verschiedene Probleme vorzunehmen.

In erster Linie wollen wir das Problem behandeln, die Differentialquotienten der elliptischen Functionen nach dem Argument zu untersuchen.

Setzen wir:

$$f_{2m}(v) = \vartheta_0^{2m}(v) \frac{d^{2m-1}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}}{dv^{2m-1}},$$

so leistet diese ganze transcendente Function den Gleichungen Genüge:

$$f_{2m}(v) = -f_{2m}(v),$$

$$f_{2m}(v+\tau) = e^{-2m\pi i(2v+\tau)} f_{2m}(v).$$

Wir haben es also mit einer Thetafunction von der Ordnung $2m$ zu thun und können setzen:

$$f_{2m}(v) = \vartheta_2(v).\vartheta_3(v) \sum c_r.\vartheta_1^{2r}(v).\vartheta_0^{2m-2r-2}(v),$$

oder also wir erhalten das Resultat:

$$1)\qquad \frac{d^{2m-1}snu}{du^{2m-1}} = cnu.dnu \sum_{r=0}^{r=m-1} c'_r.sn^{2r}u.$$

Im einfachsten Falle wird, wie schon bewiesen:

$$\frac{dsnu}{du} = cnu.dnu.$$

Genau so folgt:

$$2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^{2m-1}cnu}{du^{2m-1}} = snu.dnu \displaystyle\sum_{r=0}^{r=m-1} c''_r.cn^{2r}u \\ \dfrac{dcnu}{du} = -snu.dnu. \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{2m-1} dn\,u}{du^{2m-1}} = sn\,u\,.\,cn\,u \sum\limits_{r=0}^{r=m-1} c_r''' dn^{2r} u, \\[2ex] \dfrac{d dn\,u}{du} = -k^2 sn\,u\,.\,cn\,u. \end{cases}$$

Ganz analog wie vorhin wollen wir ferner setzen:

$$f_{2m+1}(v) = \vartheta_0^{2m+1}(v) \frac{d^{2m} \dfrac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}}{dv^{2m}}.$$

Es ist dann $f_{2m+1}(v)$ eine ganze transcendente Function, die den Gleichungen Genüge leistet:

$$f_{2m+1}(v) = -f_{2m+1}(v),$$

$$f_{2m+1}(v+\tau) = -e^{-(2m+1)\pi i(2v+\tau)} f_{2m+1}(v).$$

Unter solchen Umständen erhalten wir die Darstellung:

$$f_{2m+1}(v) = \vartheta_1(v) \sum_{r=0}^{r=m} e_r \vartheta_1^{2r}(v)\,.\,\vartheta_0^{2m-2r}(v),$$

oder also es ergiebt sich das Resultat:

$$4)\quad \frac{d^{2m} sn\,u}{du^{2m}} = sn\,u \sum_{r=0}^{r=m} e_r'\,.\,sn^{2r} u.$$

Setzen wir $m=1$, so ergiebt sich mit leichter Mühe:

$$\frac{d^2 sn\,u}{du^2} = -(1+k^2) sn\,u + 2k^2 sn^3 u.$$

Für die Cosinusamplitude erhalten wir ähnlich:

$$5)\quad \frac{d^{2m} cn\,u}{du^{2m}} = cn\,u \sum_{r=0}^{r=m} e_r''\,.\,cn^{2r} u.$$

Im einfachsten Falle wird:

$$\frac{d^2 cn\,u}{du^2} = (2k^2-1) cn\,u - 2k^2 cn^3 u.$$

Endlich erhalten wir:

$$6)\quad \frac{d^{2m} dn\,u}{du^{2m}} = dn\,u \sum e_r''' dn^{2r} u.$$

Im einfachsten Falle wird:

$$\frac{d^2 dn\,u}{du^2} = (2-k^2) dn\,u - 2 dn^3 u.$$

Aus den angestellten Untersuchungen folgt, dass die Coefficienten c und e sämmtlich ganze Functionen von k^2 sind.

Die lineare Transformation giebt nun einige wichtige Beziehungen. Erstens lehrt sie, dass wir nur nöthig haben, die Differentialquotienten der Cosinusamplitude zu berechnen, um aus ihnen sofort die Differentialquotienten der Deltaamplitude zu kennen. Es ergiebt sich das aus der Relation:

$$dn(u, k) = cn\left(ku, \frac{1}{k}\right).$$

Zweitens aber ergiebt sich für die Differentialquotienten der Sinusamplitude die Beziehung:

$$sn\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} sn(u, k).$$

Auf die wirkliche Berechnung der Coefficienten möge nicht tiefer eingegangen werden, wir beschränken uns vielmehr auf die folgenden Bemerkungen.

Wir fanden die Form:

$$\frac{d^{2m} snu}{du^{2m}} = \sum_{r=0}^{r=m} s_{m,r}\, sn^{2r+1} u.$$

Hieraus folgt durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{d^{2m+1} snu}{du^{2m+1}} = cnu \,.\, dnu \sum (2r+1) s_{m,r}\, sn^{2r} u,$$

$$\frac{d^{2m+2} snu}{du^{2m+2}} = [-(1+k^2) snu + 2k^2 sn^3 u] \sum (2r+1) s_{m,r}\, sn^{2r} u$$
$$+ cn^2 u\, dn^2 u \sum (2r+1)\, 2r s_{m,r}\, sn^{2r-1} u.$$

Andrerseits ist:

$$\frac{d^{2m+2} snu}{du^{2m+2}} = \sum_{r=0}^{r=m+1} s_{m+1,r}\, sn^{2r+1} u.$$

Die Vergleichung ergiebt:

$$7)\quad \begin{cases} s_{m+1,r} = (2r-1) \,.\, 2r \,.\, k^2 s_{m,r-1} - (2r+1)^2 (1+k^2) s_{m,r} \\ \qquad + (2r+2)(2r+3) s_{m,r+1}. \end{cases}$$

Wir haben also eine Recursionsformel für die Coefficienten gefunden, mit deren Hülfe dieselben berechnet werden können. Wir können dieselbe leicht so verallgemeinern, dass sie für alle drei elliptischen Functionen Gültigkeit besitzt. In der That, verstehen wir unter $f(u)$ eine der drei elliptischen Functionen snu, cnu, dnu und nehmen an, dass:

$$\left(\frac{df(u)}{du}\right)^2 = \alpha + \beta f(u)^2 + \gamma f(u)^4$$

ist, so können wir setzen:

$$\frac{d^{2m} f(u)}{du^{2m}} = \sum s_{m,r} f(u)^{2r+1}.$$

Dann erhalten wir die Recursionsformel:

$$s_{m+1,r} = (2r-1).2r.\gamma.s_{m,r-1} + (2r+1)^2\beta.s_{m,r} + (2r+2)(2r+3)\alpha.s_{m,r+1}.$$

Die letzten Betrachtungen gelten für die geraden Differentialquotienten. Die ungeraden können dann aus ihnen durch nochmaliges Differenziren gefunden werden.

André hat diese Recursionsformeln verfolgt, um die Eigenschaften der Coefficienten näher zu entwickeln.

§ 43.

Die Entwickelung der elliptischen Functionen in Potenzreihen.

Setzen wir in den aufgestellten Formeln für die Differentialquotienten der drei Functionen snu, cnu, dnu das Argument gleich Null, so erhalten wir die Coefficienten in der Entwickelung derselben nach Potenzen von u. Aus den gefundenen Resultaten folgt dann der

Lehrsatz: Die drei elliptischen Functionen snu, cnu, dnu lassen sich als Potenzreihen von u darstellen. Die Coefficienten setzen sich ganz und rational aus k^2 zusammen.

Ferner folgt, dass wir den Ansatz machen können:

$$1)\qquad \begin{cases} snu = \frac{u}{1} - \mathfrak{A}_1\frac{u^3}{3!} + \mathfrak{A}_2\frac{u^5}{5!}\cdots, \\ cnu = 1 - \mathfrak{B}_1\frac{u^2}{1.2} + \mathfrak{B}_2\frac{u^4}{4!}\cdots, \\ dnu = 1 - \mathfrak{C}_1\frac{u^2}{1.2} + \mathfrak{C}_2\frac{u^4}{4!}\cdots \end{cases}$$

Die lineare Transformation zeigt dann die Richtigkeit der Beziehungen:

$$\mathfrak{C}_n(k) = k^{2n}\mathfrak{B}_n\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$\mathfrak{A}_n(k) = k^{2n}\mathfrak{A}_n\left(\frac{1}{k}\right).$$

Wir können uns also auf die Betrachtung der Cosinusamplitude beschränken, um zu gleicher Zeit die Betrachtung der Deltaamplitude durchgeführt zu haben.

Zu gleicher Zeit folgt, dass $\mathfrak{A}_n(k)$ eine ganze reciproke Function vom Grade n ist, dass $\mathfrak{C}_n(k)$ den Grad $2n$ und $\mathfrak{B}_n(k)$ den Grad $2n-2$ besitzt. In Bezug auf die letzte Eigenschaft möge daran erinnert werden, dass die Grössen $\mathfrak{C}_n$ den gemeinsamen Factor k^2 besitzen müssen, weil die Deltaamplitude 1 wird, wenn $k^2 = 0$ ist.

Hermite hat die Transformation zweiten Grades dazu benützt, um einige interessante Eigenschaften der Coefficienten abzuleiten. Es möge das in folgender Weise auseinandergesetzt werden.

Die Transformation zweiten Grades lehrt die Richtigkeit der Formeln:

$$cn\left((k-ik')u, \frac{k+ik'}{k-ik'}\right) = (k-ik')\frac{k.cn^2u+ik'}{cnu},$$

$$cn\left((k+ik')u, \frac{k-ik'}{k+ik'}\right) = (k+ik')\frac{k.cn^2u-ik'}{cnu}.$$

Die Verbindung beider Formeln ergiebt:

$$2)\ (k+ik')cn\left((k-ik')u, \frac{k+ik'}{k-ik'}\right) + (k-ik')cn\left((k+ik')u, \frac{k-ik'}{k+ik'}\right) = 2k.cnu.$$

Setzen wir $k = cos\gamma$, so nimmt die letzte Formel die Gestalt an:

$$e^{\gamma i}cn(e^{-\gamma i}u, e^{2\gamma i}) + e^{-\gamma i}cn(e^{\gamma i}u, e^{-2\gamma i}) = 2cos\gamma . cn(u, cos\gamma).$$

Ersetzen wir die Cosinusamplitude durch ihre unendliche Reihe, so folgt für $\mathfrak{B}_n$ die Formel:

$$e^{(2n-1)\gamma i}\mathfrak{B}_n(e^{-2\gamma i}) + e^{-(2n-1)\gamma i}\mathfrak{B}_n(e^{2\gamma i}) = 2cos\gamma . \mathfrak{B}_n(cos\gamma).$$

Wir wollen nun den Ansatz machen:

$$\mathfrak{B}_n(k) = b_0 + b_1(2k)^2 + b_2(2k)^4 + \cdots b_{n-1}(2k)^{2n-2},$$

so folgt aus den früher angestellten Betrachtungen leicht, dass die Grössen b ganze Zahlen sein müssen, dass ferner b_0 stets gleich 1 sein muss.

Die aufgestellte Gleichung für die Grössen $\mathfrak{B}_n$ liefert nun die Beziehung:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} 2^{2r}b_r cos(2n-4r-1)\gamma = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} 2^{2\varrho}b_\varrho cos^{2\varrho+1}\gamma.$$

Ersetzt man $cos^{2\varrho+1}\gamma$ durch die Cosinus der vielfachen Winkel vermöge der Formel:

$$2^{2\varrho}cos^{2\varrho+1}\gamma = cos(2\varrho+1)\gamma + \frac{2\varrho+1}{1}cos(2\varrho-1)\gamma$$
$$+ \frac{2\varrho+1}{1}\frac{2\varrho}{2}cos(2\varrho-3)\gamma + \cdots \frac{(2\varrho+1)\ldots(\varrho+2)}{\varrho!}cos\gamma,$$

so ergiebt sich mit leichter Mühe:

$$\sum 2^{2r}b_r cos(2n-4r-1)\gamma = \sum\Big(b_\varrho + \frac{2\varrho+3}{1}b_{\varrho+1} + \frac{(2\varrho+5).(2\varrho+4)}{1.2}b_{\varrho+2} + \cdots$$
$$+ \frac{(2n-1)\ldots(n+\varrho+1)}{1.2\ldots(n-\varrho-1)}b_{n-1}\Big)cos(2\varrho+1)\gamma.$$

Da diese Gleichung für alle Werthe von γ gilt, so müssen die Coefficienten derselben Cosinus links und rechts einander gleich sein.

Einem gegebenen Werthe von ϱ entspricht für r einer der beiden Werthe:

$$\frac{n-\varrho-1}{2}, \quad \frac{n+\varrho}{2},$$

je nachdem die Zahl $2n - 4r - 1$ positiv oder negativ ist. Wir haben denjenigen zu wählen, für welchen r eine ganze Zahl ist. Man hat also

$$2^{n-\varrho-1} b_{\frac{n-\varrho-1}{2}}$$

oder

$$2^{n+\varrho} b_{\frac{n+\varrho}{2}} = b_\varrho + \frac{2\varrho+3}{1} b_{\varrho+1} + \frac{(2\varrho+5).(2\varrho+4)}{1.2} b_{\varrho+2} + \cdots \frac{(2n-1)\ldots(n+\varrho+1)}{1.2\ldots(n-\varrho-1)} b_{n-1}.$$

Giebt man der Grösse ϱ die Werthe $n-1, n-2, n-3, \ldots 0$, so erhält man ein System von n linearen und homogenen Gleichungen:

$$b_0 = b_{n-1},$$

$$2^{2n-2} b_{n-1} = b_{n-2} + \frac{2n-1}{1} b_{n-1},$$

$$2^2 b_1 = b_{n-3} + \frac{2n-3}{1} b_{n-2} + \frac{(2n-1).(2n-2)}{1.2} b_{n-1},$$

$$2^{2n-4} b_{n-2} = b_{n-4} + \frac{2n-5}{1} b_{n-3} + \frac{(2n-3).(2n-4)}{1.2} b_{n-2} + \frac{(2n-1).(2n-2).(2n-3)}{1.2.3} b_{n-1}$$

. . . .

$$\left.\begin{array}{r} 2^{n-1} b_{\frac{n-1}{2}} \\ 2^n b_{\frac{n}{2}} \end{array}\right\} = b_0 + \frac{3}{1} b_1 + \frac{5.4}{1.2} b_2 + \cdots \frac{(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots(n-1)} b_{n-1}$$

zwischen den n Grössen $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$. Man überzeugt sich durch Addition leicht, dass nur $n-1$ derselben von einander unabhängig sein können.

Diese Gleichungen können nun zur wirklichen Berechnung der Grössen b dienen. Nehmen wir z. B. $n = 7$, so sind die folgenden Gleichungen aufzulösen:

$$2^{12} = b_6 + \frac{13}{1},$$

$$2^2 . b_1 = b_4 + \frac{11}{1} b_5 + \frac{13.12}{1.2},$$

$$2^{10} . b_5 = b_3 + \frac{9}{1} b_4 + \frac{11.10}{1.2} b_6 + \frac{13.12.11}{1.2.3},$$

$$2^4 . b_2 = b_2 + \frac{7}{1} b_3 + \frac{9.8}{1.2} b_4 + \frac{11.10.9}{1.2.3} b_5 + \frac{13.12.11.10}{1.2.3.4},$$

$$2^8 . b_4 = b_1 + \frac{5}{1} b_2 + \frac{7.6}{1.2} b_3 + \frac{9.8.7}{1.2.3} b_4 + \frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} b_5 + \frac{13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5}.$$

Hieraus folgt:

$b_1 = 74733, \quad b_2 = 1434066, \quad b_3 = 1670672, \quad b_4 = 253941, \quad b_5 = 4083.$

Unter solchen Umständen nehmen die ersten Coefficienten in der Entwickelung von $cn\,u$ die Form an:

$$\mathfrak{B}_1 = 1,$$
$$\mathfrak{B}_2 = 1 + (2k)^2,$$
$$\mathfrak{B}_3 = 1 + 11\,(2k)^2 + (2k)^4,$$
$$\mathfrak{B}_4 = 1 + 102\,(2k)^2 + 57\,(2k)^4 + (2k)^6,$$
$$\mathfrak{B}_5 = 1 + 922\,(2k)^2 + 1923\,(2k)^4 + 247\,(2k)^6 + (2k)^8,$$
$$\mathfrak{B}_6 = 1 + 8303\,(2k)^2 + 54415\,(2k)^4 + 24040\,(2k)^6 + 1013\,(2k)^8 + (2k)^{10},$$
$$\mathfrak{B}_7 = 1 + 74733(2k)^2 + 1434066\,(2k)^4 + 1670672\,(2k)^6 + 253941\,(2k)^8 + 4083\,(2k)^{10} + (2k)^{12},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus diesen Coefficienten folgen dann vermöge der vorhin entwickelten Beziehung unmittelbar die Coefficienten der Deltaamplitude, und zwar wird:

$$\mathfrak{C}_1 = k^2,$$
$$\mathfrak{C}_2 = k^2(k^2 + 2^2),$$
$$\mathfrak{C}_3 = k^2(k^4 + 11 . 2^2 . k^2 + 2^4),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Coefficienten der Sinusamplitude können dann vermöge der folgenden Betrachtungen gefunden werden. Es ist:

$$\frac{ds n u}{du} = cn u . dn u,$$

mithin erhalten wir:

$$\mathfrak{A}_n = \mathfrak{B}_n + \frac{2n.(2n-1)}{1.2}\mathfrak{B}_{n-1}.\mathfrak{C}_1 + \frac{2n.(2n-1).(2n-2).(2n-3)}{1.2.3.4}\mathfrak{B}_{n-2}.\mathfrak{C}_2 + \cdots \mathfrak{C}_n.$$

Für die einfachsten Werthe von n wird:

$$\mathfrak{A}_1 = 1 + k^2,$$
$$\mathfrak{A}_2 = 1 + k^4 + 14k^2,$$
$$\mathfrak{A}_3 = 1 + k^6 + 135k^2(1 + k^2),$$
$$\mathfrak{A}_4 = 1 + k^8 + 1228k^2(1 + k^4) + 5478k^4,$$
$$\mathfrak{A}_5 = 1 + k^{10} + 11069k^2(1 + k^6) + 165826k^4(1 + k^2),$$
$$\mathfrak{A}_6 = 1 + k^{12} + 99642k^2(1 + k^8) + 4494351k^4(1 + k^4) + 13180268k^6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Setzt man:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right),$$

so nehmen die Ausdrücke, die reciprok in k sind, die Form an:

$$\mathfrak{A}_1 = 2k\alpha,$$
$$\mathfrak{A}_2 = (2k)^2(\alpha^2 + 3),$$
$$\mathfrak{A}_3 = (2k)^3(\alpha^3 + 33\alpha),$$
$$\mathfrak{A}_4 = (2k)^4(\alpha^4 + 306\alpha^2 + 189),$$
$$\mathfrak{A}_5 = (2k)^5(\alpha^5 + 2766\alpha^3 + 8289\alpha),$$
$$\mathfrak{A}_6 = (2k)^6(\alpha^6 + 24909\alpha^4 + 255987\alpha^2 + 68607),$$
. . . .

§ 44.

Anderweite Lösung desselben Problems.

Die Fourier'schen Reihen, welche wir für die elliptischen Functionen gefunden haben, geben die Möglichkeit, das vorhin untersuchte Problem in anderer Weise zu behandeln.

Wir hatten die Beziehung:

$$1)\qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = \frac{2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \cdots)}{1 + 2q + 2q^4 + \cdots}.$$

Durch Umkehrung folgt hieraus:

$$2)\qquad \sqrt{q} = \frac{k}{4}(1 + a_1 k^2 + a_2 k^4 + \cdots).$$

Setzen wir:

$$3)\qquad \Omega = 4K,$$

ersetzen dann in K die Potenzen von q durch die Potenzreihen von k und ordnen nach Potenzen von k, so kann der Ansatz gemacht werden:

$$\Omega = 2\pi(1 + b_1 . k^2 + b_2 . k^4 + \cdots).$$

Andererseits hatten wir gefunden:

$$sn\, u = \frac{8\pi q^{\frac{1}{2}}}{k\Omega}\sum \frac{q^m}{1 - q^{2m+1}} \sin(2m + 1)\pi v,$$
$$u = \frac{\Omega}{2} v.$$

Ersetzen wir in dieser Reihe die Potenzen von q durch die Potenzreihen von k, so erhalten wir eine Darstellung von folgender Form:

$$4)\qquad sn\, u = \sum (k^2)^m P_{0,m}^{(0)} \sin(2m + 1)\pi v,$$

wobei die $P_{0,m}^{(0)}$ Potenzreihen von k^2 sind, deren constantes Glied von Null verschieden ist. Durch Differentiation ergiebt sich:

$$\frac{d\,sn\,u}{dk^2} = \sum (k^2)^{m-1} P^{(1)}_{0,m} \sin(2m+1)\pi v + u \sum (k^2)^m P^{(1)}_{1,m} \cos(2m+1)\pi v,$$

$$\frac{d^2 sn\,u}{(dk^2)^2} = \sum (k^2)^{m-2} P^{(2)}_{0,m} \sin(2m+1)\pi v + u \sum (k^2)^{m-1} P^{(2)}_{1,m} \cos(2m+1)\pi v$$
$$+ u^2 \sum (k^2)^m P^{(2)}_{2,m} \sin(2m+1)\pi v,$$

. . . .

$$\frac{d^n sn\,u}{(dk^2)^n} = \sum\sum (k^2)^{m-n+2s} u^{2s} P^{(n)}_{2s,m} \sin(2m+1)\pi v$$
$$+ \sum\sum (k^2)^{m-n+2s+1} u^{2s+1} P^{(n)}_{2s+1,m} \cos(2m+1)\pi v,$$

wobei die Summen in einfach angebbarer Weise zu nehmen und die Grössen P Potenzreihen von k^2 sind. Setzt man in diesen Ausdrücken $k^2 = 0$, so erhält man, von einem Zahlenfactor abgesehen, die Coefficienten der einzelnen Potenzen von k^2 in der Darstellung von $sn\,u$ als Potenzreihe von k^2. Damit aber erhalten wir den zuerst von André aufgestellten

Lehrsatz: Die Sinusamplitude kann nach Potenzen von k^2 entwickelt werden und zwar in der Form:

$$sn\,u = u_0 + \frac{u_1 . k^2}{1} + \frac{u_2 . k^4}{2!} + \cdots \frac{u_n . k^{2n}}{n!} + \cdots$$

Hierbei hat u_n die Form:

$$u_n = \sum p_{2s,m} . u^{2s} . \sin(2m+1)u + \sum p_{2s+1,m} . u^{2s+1} . \cos(2m+1)u;$$

m und n sind positive ganze Zahlen oder Null. Die erste Summe ist über alle s und m auszudehnen, die der Ungleichung Genüge leisten:

$$m - n + 2s \leqq 0,$$

während für die Grössen m und s der zweiten die Ungleichheit besteht:

$$m - n + 2s + 1 \leqq 0.$$

Die Grössen $p_{2s,m}$ und $p_{2s+1,m}$ sind numerische Constanten.

In den einfachsten Fällen wird:

$$u_0 = \sin u,$$

$$u_1 = \frac{1}{16}(\sin u + \sin 3u) - \frac{u}{4}\cos u,$$

$$u_2 = \frac{1}{256}(7\sin u + 8\sin 3u + \sin 5u) - \frac{u}{64}(6\cos u + 3\cos 3u) - \frac{u^2}{64} 2\sin u,$$

. . . .

Für die Cosinusamplitude gilt ein ähnlicher Satz. Da die Methode ganz ungeändert bleibt, so können wir uns damit begnügen, denselben anzugeben.

Lehrsatz: Die Cosinusamplitude kann nach Potenzen von k^2 entwickelt werden und zwar in der Form:

$$cn\,u = v_0 + v_1 . k^2 + v_2 . k^4 + \cdots$$

Hierbei hat v_n die Form:

$$v_n = \sum p_{2s,m} . u^{2s} . \cos(2m+1)u + \sum p_{2s+1,m} . u^{2s+1} . \sin(2m+1)u;$$

m und n sind positive ganze Zahlen oder Null. Die erste Summe ist über alle s und m auszudehnen, die der Ungleichung Genüge leisten:

$$m - n + 2s \leq 0,$$

während für die Grössen m und s der zweiten die Ungleichung besteht:

$$m - n + 2s + 1 \leq 0.$$

In den einfachsten Fällen ergiebt sich:

$$v_0 = \cos u,$$

$$v_1 = \frac{1}{16}(-\cos u + \cos 3u) + \frac{u}{4}\sin u,$$

$$v_2 = \frac{1}{256}(-9\cos u + 8\cos 3u + \cos 5u) + \frac{u}{64}(4\sin u + 3\sin 3u) - \frac{u^2}{32}\cos u.$$

Wir haben uns in den beiden letzten Sätzen die elliptischen Functionen nach Potenzen von k^2 entwickelt gedacht. Denken wir uns dieselben nach Potenzen von u entwickelt, so ergeben sich unter Benutzung der einfachsten Fälle die Resultate, die zuerst Hermite aufgestellt hat, und zwar in der folgenden Form:

Es kann gesetzt werden:

$$sn\,u = u - \frac{P_1 . u^3}{3!} + \frac{P_2 . u^5}{5!} \cdots + (-1)^m \frac{P_m . u^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

$$cn\,u = 1 - \frac{Q_1 . u^2}{1.2} + \frac{Q_2 . u^4}{4!} \cdots + (-1)^m \frac{Q_m . u^{2m}}{(2m)!} \cdots,$$

wobei dann die folgenden Beziehungen stattfinden:

$$P_m = 1 + P_{1m}k^2 + P_{2m}k^4 + \cdots \qquad k^{2m},$$

$$Q_m = 1 + Q_{1m}k^2 + Q_{2m}k^4 + \cdots Q_{m-1m}k^{2m-2},$$

$$4^2 P_{1m} = 3^{2m+1} - 8m - 3,$$

$$4^4 P_{2m} = 5^{2m+1} - (8m-4)\,3^{2m+1} + 32m^2 - 32m + 17,$$

$$4^6 P_{3m} = 7^{2m+1} - (8m-12)\,5^{2m+1} + (32m^2 - 88m + 30)\,3^{2m+1}$$
$$- \frac{1}{3}(256m^3 - 1056m^2 + 752m + 471),$$

. . . .

$$4^2Q_1 = 3^{2m} - 8m - 1,$$
$$4^4Q_2 = 5^{2m} - (8m - 8)3^{2m} + 32m^2 - 48m - 9,$$
$$4^6Q_3 = 7^{2m} - (8m - 16)5^{2m} + (32m^2 - 120m + 82)3^{2m}$$
$$- \frac{1}{3}(256m^3 - 288m^2 + 320m + 297),$$

. . . .

Die Formeln für die Deltaamplitude brauchen nicht näher angegeben zu werden, da sie unmittelbar aus den angegebenen folgen.

Aus den soeben entwickelten Formeln können durch Quadrirung leicht die Formeln für die Quadrate der elliptischen Functionen gefunden werden und zwar genügt es die Formel für sn^2u zu kennen, um sofort die entsprechende Entwickelung für cn^2u und dn^2u zu haben.

Wir erhalten nun:

$$sn^2u = \mathfrak{A}_0^{(2)}\frac{u^2}{1.2} - \mathfrak{A}_1^{(2)}\frac{u^4}{4!} + \mathfrak{A}_2^{(2)}\frac{u^6}{6!}\cdots,$$

wobei in den einfachsten Fällen wird:

$$\mathfrak{A}_0^{(2)} = 2,$$
$$\mathfrak{A}_1^{(2)} = 2^4k\alpha,$$
$$\mathfrak{A}_2^{(2)} = 2^4k^2(2^3\alpha^2 + 9),$$
$$\mathfrak{A}_3^{(2)} = 2^8k^3(2^2\alpha^3 + 27\alpha),$$
$$\mathfrak{A}_4^{(2)} = 2^9k^4(2^4\alpha^4 + 486\alpha^2 + 189),$$
$$\mathfrak{A}_5^{(2)} = 2^{12}k^5(2^4\alpha^5 + 2016\alpha^3 + 3429\alpha),$$

. . . .

§ 45.[19])

Die Entwickelung von $1:snu$ und $1:sn^2u$ in Potenzreihen.

Durch lineare Transformation lassen sich aus den Formeln des vorigen Paragraphen Reihenentwickelungen für einige weitere elliptische Functionen ableiten, insbesondere für $1:cnu$ und $1:dnu$, dagegen ist es nicht möglich, aus denselben unmittelbar eine Reihenentwickelung für $1:snu$ zu finden. Ueber diese Reihenentwickelungen mögen die folgenden kurzen Bemerkungen gemacht werden.

Es ist:

$$\frac{\Omega}{2\pi}\frac{1}{snu} = \frac{1}{sin\,\pi v} + 4\sum\frac{q^{2m+1}}{1-q^{2m+1}}sin(2m+1)\pi v.$$

Mithin hat die Function:

$$F(u) = \frac{1}{snu} - \frac{2\pi}{\Omega}\frac{1}{sin\,\pi v}$$

die Form:

$$F(u) = \sum (k^2)^{2m+1} P_{0,m}^{(0)} sin(2m+1)\pi v.$$

Durch Differenziren erhalten wir:

$$\frac{dF(u)}{dk^2} = \sum (k^2)^{2m} P_{0,m}^{(1)} sin(2m+1)\pi v + u\sum (k^2)^{2m+1} P_{1,m}^{(1)} cos(2m+1)\pi v,$$

$$\frac{d^2F(u)}{(dk^2)^2} = \sum (k^2)^{2m-1} P_{0,m}^{(2)} sin(2m+1)\pi v + u\sum (k^2)^{2m} P_{1,m}^{(2)} cos(2m+1)\pi v$$
$$+ u^2 \sum (k^2)^{2m+1} P_{2,m}^{(2)} sin(2m+1)\pi v,$$

. . . .

$$\frac{d^nF(u)}{(dk^2)^n} = \sum\sum (k^2)^{2m+1-n+2s} u^{2s} P_{2s,m}^{(n)} sin(2m+1)\pi v$$
$$+ \sum\sum (k^2)^{2m+2-n+2s} u^{2s+1} P_{2s+1,m}^{(n)} cos(2m+1)\pi v.$$

Damit ist die Form der Entwickelung von $F(u)$ gefunden. Da nun

$$\frac{1}{snu} = F(u) + \frac{2\pi}{\Omega}\frac{1}{sin\,\pi v}$$

ist, so bleibt nur noch das Problem übrig, den Ausdruck:

$$\frac{2\pi}{\Omega}\frac{1}{sin\,\pi v}$$

nach Potenzen von k^2 zu entwickeln. Wir betrachten an seiner Stelle die Function:

$$F_1(u) = \frac{2\pi}{\Omega}\left(\frac{1}{sin\,\pi v} - \frac{1}{\pi v}\right).$$

Dieselbe lässt sich in eine Potenzreihe von k^2 entwickeln, deren Coefficienten Potenzreihen von u sind. Die Coefficienten können in doppelter Weise dargestellt werden. Setzen wir:

$$F_1(u) = v_0 + v_1 k^2 + v_2 k^4 + \cdots,$$

so ist erstens:

$$v_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n F_1(u)}{(dk^2)^n}\right)_{k^2=0}$$

nach bekannten Regeln in geschlossener Form darzustellen. Zweitens können wir aber auch von der Reihenentwickelung Gebrauch machen:

$$cosec\,\pi v = \frac{1}{\pi v} + \frac{2(2-1)}{1.2} B_1 \pi v + \frac{2(2^3-1)}{4!} B_2 \pi v^3 + \cdots$$

Es ergeben sich die Coefficienten der einzelnen Potenzen von k^2 dann in der Form von Potenzreihen von u. Mithin erhalten wir den

Lehrsatz: Die Function $1:snu$ kann in der Form dargestellt werden:

$$\frac{1}{snu} = \frac{1}{u} + u_0 + v_0 + (u_1 + v_1)k^2 + \cdots (u_n + v_n)k^{2n} + \cdots$$

Dabei ist:

$$u_n = \sum\sum p_{2s,m} \cdot u^{2s} \cdot \sin(2m+1)u + \sum\sum p_{2s+1,m} \cdot u^{2s+1} \cdot \cos(2m+1)u,$$

$$v_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n F_1(u)}{(dk^2)^n}\right)_{k^2=0};$$

m und n sind ganze positive Zahlen oder Null. Die erste Summe ist über alle s und m auszudehnen, die der Ungleichung Genüge leisten:

$$2m + 1 - n + 2s \leq 0,$$

während für die Grössen m und n der zweiten die Ungleichung besteht:

$$2m + 1 - n + 2s + 1 \leq 0.$$

Es möge davon abgesehen werden, die einfachsten Werthe von u_n und v_n hinzuschreiben. Ordnen wir nach Potenzen von u, so erhalten wir in den einfachsten Fällen die Resultate, die zuerst Hermite im 81. Band des Crelle'schen Journals aufgestellt hat. Es ist:

$$\frac{1}{snu} = \frac{1}{u} + S_1 u + \frac{S_2 u^3}{3!} + \cdots \frac{S_m u^{2m-1}}{(2m-1)!} \cdots,$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$S_m = S_{0m} - S_{1m}k^2 + S_{2m}k^4 \ldots (-1)^m S_{mm} k^{2m},$$

$$S_{0m} = \frac{2^{2m-1}-1}{m} B_m,$$

$$4 S_{1m} = (-1)^m + 2(2^{2m-1} - 1) B_m,$$

$$4^3 S_{2m} = (-1)^m (8m - 9) + (8m - 14)(2^{2m-1} - 1) B_m,$$

$$4^5 S_{3m} = (-1)^m (32m^2 - 128m + 101 + 3^{2m-1}) + \frac{1}{3}(64m^2 - 336m + 416)(2^{2m-1} - 1) B_m,$$

. . . .

Für die Function $1:sn^2u$ lassen sich ganz analoge Untersuchungen anstellen, wir müssen aber von diesen absehen, da die entsprechenden Fourier'schen Entwickelungen bisher nicht gegeben worden sind. Dagegen wollen wir einige andere Untersuchungen über die Entwickelung dieser Functionen bringen, die im engen Verhältniss zu den Weierstrass'schen Theorien stehen. Dazu setzen wir:

$$1) \qquad p(u) = \frac{1}{sn^2u} - \frac{1+k^2}{3}.$$

Dieselbe Function kann dann auch geschrieben werden:

$$p(u) = \frac{dn^2u}{sn^2u} - \frac{1-2k^2}{3} = \frac{cn^2u}{sn^2u} + \frac{2-k^2}{3}.$$

Wir können diese Resultate auch folgendermassen darstellen. Es ist:

$$2)\qquad p(u) = \frac{cn^2u}{sn^2u} + e_1 = \frac{dn^2u}{sn^2u} + e_2 = \frac{1}{sn^2u} + e_3,$$

wobei gesetzt ist:

$$e_1 = \frac{1+k'^2}{3},\quad e_2 = -\frac{k'^2-k^2}{3},\quad e_3 = -\frac{1+k^2}{3}.$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{dp(u)}{du} = -\frac{2cnu\,.\,dnu}{sn^3u}$$

oder also:

$$\left(\frac{dp(u)}{du}\right)^2 = 4[p(u)-e_1][p(u)-e_2][p(u)-e_3]$$
$$= 4p(u)^3 - g_2p(u) - g_3,$$

wenn erwogen wird, dass

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

ist und gesetzt wird:

$$3)\qquad g_2 = \frac{4}{3}(1-k^2k'^2),\quad g_3 = \frac{4}{27}(k'^2-k^2)(2+k^2k'^2).$$

Mithin erhalten wir:

$$4)\qquad 2p''(u) = 12p(u)^2 - g_2.$$

Die ersten Glieder in der Entwickelung von $p(u)$ sind aus der Entwickelung von sn^2u unmittelbar bekannt. Jedenfalls ist der Ansatz zu machen:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + c_0 + c_1u^2 + c_2u^4 + \cdots,$$

wobei ist:

$$c_0 = 0,\quad c_1 = \frac{g_2}{20},\quad c_2 = \frac{g_3}{28}.$$

Die folgenden Glieder können dann mit Hülfe einer Recursionsformel bestimmt werden, die unmittelbar aus unserer Differentialgleichung folgt. In der That, es ist:

$$p''(u) = \frac{6}{u^4} + 2.1.c_1 + 4.3.c_2.u^2 + 6.5.c_3.u^4 + 8.7.c_4.u^6 + \cdots,$$

mithin wird:

$$(2\nu+2)(2\nu+1)\,c_{\nu+1} = 6\Big(2c_{\nu+1} + \sum_{\lambda+\mu=\nu} c_\lambda . c_\mu\Big).$$

Wir erhalten auf diesem Wege:

$$5)\quad p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{4.5}u^2 + \frac{g_3}{4.7}u^4 + \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}u^6 + \frac{3g_2 \cdot g_3}{2^4.5.7.11}u^8 + \cdots$$

und zu gleicher Zeit das Resultat, dass alle Coefficienten sich, von Zahlenfactoren abgesehen, ganz und rational durch g_2 und g_3 ausdrücken lassen.

§ 46.

Entwickelung der Potenzen von $sn u$, $cn u$, $dn u$ in Potenzreihen.

Ausser dem Problem, die Functionen $sn u$, $cn u$, $dn u$ in Potenzreihen zu entwickeln, kann auch das Problem gestellt werden, die Potenzen dieser Functionen zu entwickeln. Da dieses Problem naturgemäss von geringerer Bedeutung ist als das ursprüngliche, so wollen wir uns bei ihm kürzer fassen. Die Function:

$$\vartheta_1^{2n+1}(v)$$

ist eine Thetafunction von der Ordnungszahl $2n+1$ und der Charakteristik $(1, 1)$, überdies eine ungerade Function. Functionen derselben Art sind die Grössen:

$$\vartheta_1(v) \cdot \vartheta_0^{2n}(v), \quad \vartheta_0^{2n+1}(v) \frac{d^{2r} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}}{dv^{2r}}, \qquad r = 1, \ldots n.$$

Hieraus folgt dann ohne Weiteres, dass der Ansatz erlaubt ist:

$$1)\quad \frac{k^{2n} . sn^{2n+1} u}{2n+1} = R_n^{(1)} . sn u + \frac{R_{n-1}^{(3)}}{3!} \frac{d^2 sn u}{du^2} + \frac{R_{n-2}^{(5)}}{5!} \frac{d^4 sn u}{du^4} + \cdots$$
$$+ \cdots \frac{R_0^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \frac{d^{2n} sn u}{du^{2n}},$$

wobei die Grössen R Constanten sind. Die Bezeichnungsweise ist die von Jacobi gewählte.

Verwandeln wir u in $u + ik'$, so erhalten wir:

$$2)\quad \frac{1}{(2n+1) sn^{2n+1} u} = \frac{R_n^{(1)}}{sn u} + \frac{R_{n-1}^{(3)}}{3!} \frac{d^2}{du^2} \frac{1}{sn u} + \cdots \frac{R_0^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \frac{d^{2n}}{du^{2n}} \frac{1}{sn u}.$$

Erwägen wir, dass die Entwickelung von

$$\frac{1}{sn u}$$

die Form hat:

$$\frac{1}{u} + P(u),$$

so ist klar, dass die Grössen R, von einfachen Zahlenfactoren abgesehen, die Coefficienten der negativen Potenzen von u in der Entwickelung von

$$\frac{1}{sn^{2n+1}u}$$

sind. Sind diese Grössen gefunden, so ist das Problem der Entwickelung von $sn^{2n+1}u$ auf das Problem zurückgeführt, die Function snu zu entwickeln. In Bezug auf diese Grössen R zeigt Jacobi einen wichtigen Zusammenhang mit den Kugelfunctionen, welcher kurz entwickelt werden möge.

Aus dem Additionstheorem folgt:

$$sn(u+w) - sn(u-w) = \frac{2snw.cnu.dnu}{1-k^2sn^2u.sn^2w}.$$

Die rechte Seite ist der Differentialquotient nach u von:

$$\frac{1}{k}\log\frac{1+ksnu.snw}{1-ksnu.snw},$$

die linke Seite ist der Differentialquotient nach u von:

$$2\left(snu.w + \frac{d^2snu}{du^2}\frac{w^3}{3!} + \frac{d^4snu}{du^4}\frac{w^5}{5!} + \cdots\right),$$

wie sich ergiebt, wenn wir dieselbe nach Potenzen von w entwickeln. Mithin erhalten wir, wenn wir auch den Logarithmus in eine unendliche Reihe entwickeln:

$$snu.w + \frac{d^2snu}{du^2}\frac{w^3}{3!} + \frac{d^4snu}{du^4}\frac{w^5}{5!} + \cdots$$

$$= snu.snw + \frac{k^2}{3}sn^3u.sn^3w + \frac{k^4}{5}sn^5u.sn^5w + \cdots$$

Nun ist:

$$\frac{dsnw}{dw} = cnw.dnw$$

oder auch:

$$\frac{dsnw}{dw} = \sqrt{(1-sn^2w)(1-k^2sn^2w)}.$$

Hieraus folgt:

$$dw = \frac{dsnw}{\sqrt{(1-sn^2w)(1-k^2sn^2w)}}.$$

Wir können die Gleichung auch schreiben:

$$dw = dx(1 + 3R_1x^2 + 5R_2x^4 + 7R_3x^6 + \cdots),$$

wo dann die Grössen R aus der Theorie der Kugelfunctionen als bekannt angenommen sind und überdies gesetzt ist:

$$x = snw.$$

Hieraus folgt, wenn wir hinzunehmen, dass $w=0$, $x=0$ entspricht:

$$w = x + R_1 x^3 + R_2 x^5 + R_3 x^7 + \cdots,$$

$$w^n = (x + R_1 x^3 + R_2 x^5 + \cdots)^n = x^n + R_1^{(n)} x^{n+2} + R_2^{(n)} x^{n+4} + \cdots,$$

wo die Grössen $R_m^{(n)}$ zunächst verschieden von den vorhin eben so bezeichneten sind.

Setzen wir diese Werthe in unsere Gleichung ein und vergleichen die Coefficienten der gleichen Potenzen von snw, so erhalten wir die vorhin von uns aufgestellte Gleichung:

$$\frac{k^{2n}.sn^{2n+1}u}{2n+1} = R_n^{(1)}.snu + \frac{R_{n-1}^{(3)}}{3!}\frac{d^2 snu}{du^2} + \cdots \frac{d^{2n} snu}{(2n+1)!\,du^{2n}},$$

wobei nun aber die Grössen $R_m^{(n)}$ die ursprüngliche Definition besitzen. Wir können dieselben auch setzen:

$$3)\qquad R_m^{(n)} = \frac{d^m[\varphi(x)]^n}{m!\,dx^m},$$

wenn:

$$\varphi(x) = 1 + R_1 x + R_2 x^2 + R_3 x^3 + \cdots$$

gesetzt ist.

Damit sind die ungeraden Potenzen erledigt. Nehmen wir nun die Function:

$$\vartheta_1^{2n}(v),$$

so ist das eine Thetafunction von der Ordnungszahl $2n$ mit der Charakteristik $(0, 0)$, überdies eine gerade Function von v. Functionen derselben Art sind aber:

$$\vartheta_0^{2n}(v),\quad \vartheta_0^{2n-2}(v).\vartheta_1^2(v),\quad \vartheta_0^{2n}(v)\frac{d^{2r}\dfrac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)}}{dv^{2r}},\quad r = 1, 2, \ldots n-1.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$4)\qquad \begin{cases} k^{2n-2}\dfrac{sn^{2n}u}{2n} = R_{n-1}^{(2)}\dfrac{sn^2u}{1.2} + R_{n-2}^{(4)}\dfrac{d^2 sn^2u}{du^2.4!} \\[2ex] \qquad + R_{n-3}^{(6)}\dfrac{d^4 sn^2u}{du^4}\dfrac{1}{6!} + \cdots R_0^{(2n)}\dfrac{d^{2n-2}sn^2u}{du^{2n-2}.(2n)!} + R, \end{cases}$$

wobei die Grössen R Constanten sind. Dabei sind die Grössen $R_m^{(n)}$ zunächst verschieden von den vorhin definirten.

Es folgt dann wie vorhin:

$$5)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2nsn^{2n}u} = \dfrac{R_{n-1}^{(2)}}{2!\,sn^2u} + \dfrac{R_{n-2}^{(4)}}{4!}\dfrac{d^2}{du^2}\dfrac{1}{sn^2u} \\[2ex] \qquad + \dfrac{R_{n-3}^{(6)}}{6!}\dfrac{d^4}{du^4}\dfrac{1}{sn^2u} + \cdots R_0^{(2n)}\dfrac{d^{2n-2}}{du^{2n-2}}\dfrac{1}{sn^2u} + k^2.R, \end{cases}$$

so dass die Constanten wieder durch die Coefficienten der negativen Potenzen und das constante Glied in der Entwickelung von:

$$\frac{1}{sn^{2n}u}$$

bestimmt sind. Auch hier zeigt aber Jacobi wieder den Zusammenhang mit der Theorie der Kugelfunctionen.

Hierzu gehen wir von der Formel aus:

$$sn^2(u+w) - sn^2(u-w) = \frac{4snu.cnu.dnu.snw.cnw.dnw}{(1-k^2sn^2u.sn^2w)^2}$$

$$= 2\frac{d}{dw}\frac{snu.cnu.dnu.sn^2w}{1-k^2sn^2u.sn^2w}.$$

Andererseits wird:

$$sn^2(u+w) - sn^2(u-w) = 2\frac{d}{dw}\left(\frac{dsn^2u}{du}\frac{w^2}{1.2} + \frac{d^3sn^2u}{du^3}\frac{w^4}{4!} + \frac{d^5sn^2u}{du^5}\frac{w^6}{6!} + \cdots\right).$$

Also folgt, wie unmittelbar klar:

$$\frac{2snu.cnu.dnu.sn^2w}{1-k^2sn^2u.sn^2w} = 2\frac{d}{du}\left(sn^2u\cdot\frac{w^2}{1.2} + \frac{d^2sn^2u}{du^2}\frac{w^4}{4!} + \frac{d^4sn^2u}{du^4}\frac{w^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{k^2}\frac{d}{du}log(1-k^2.sn^2u.sn^2w).$$

Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$-\frac{1}{k^2}log(1-k^2.sn^2u.sn^2w) = 2\left(sn^2u.\frac{w^2}{1.2} + \frac{d^2sn^2u}{du^2}\frac{w^4}{4!} + \frac{d^4sn^2u}{du^4}\frac{w^6}{6!} + \cdots\right) + 2F(w),$$

$$F(w) = -\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{d^{2r}sn^2u}{du^{2r}}\right)_0\frac{w^{2r+2}}{(2r+2)!} = -\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\mathfrak{A}_r^{(2)}\frac{w^{2r+2}}{(2r+2)!}.$$

Setzen wir nach Jacobi:

$$\mathfrak{A}_r^{(2)} = (2r)!(-1)^r S_r^{(2)},$$

so wird:

$$F(w) = -\sum S_r^{(2)}\frac{w^{2r+2}}{(2r+1).(2r+2)}.$$

Entwickeln wir $log(1-k^2sn^2u.sn^2w)$ nach Potenzen von $sn^2u.sn^2w$ und schliessen ähnlich wie vorhin, so erhalten wir die Formel von Jacobi:

$$\frac{k^{2n-2}.sn^{2n}u}{2n} = R^{(2)}_{n-1}\frac{sn^2u}{1.2} + R^{(4)}_{n-2}\frac{d^2sn^2u}{du^2}\frac{1}{4!} + \cdots \frac{d^{2n-2}sn^2u}{du^{2n-2}}\cdot\frac{1}{(2n)!} + R,$$

$$-R = \frac{R^{(4)}_{n-2}}{3.4} + \frac{R^{(6)}_{n-3}}{5.6}S^{(2)}_1 + \frac{R^{(8)}_{n-4}}{7.8}S^{(2)}_2 + \cdots \frac{S^{(2)}_{n-2}}{(2n-1).2n},$$

wo die Grössen R nun wieder die ursprünglich definirten sind.

In anderer Weise fasst André das Problem auf, indessen soll hierauf nicht eingegangen werden.

§ 47.[20])

Ableitung von Differentialgleichungen, denen die Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente Genüge leisten, wenn τ die unabhängige Veränderliche ist.

Ehe wir die Reihenentwickelungen der Functionen $Al_\alpha(u)$ bringen, wollen wir eine Anzahl von Betrachtungen über die verschiedenen Differentialgleichungen entwickeln, die bei unserer Theorie auftreten können.

Zunächst wollen wir eine Differentialgleichung dritter Ordnung aufstellen, welcher die Function ϑ_0 aufgefasst als Function von τ Genüge leistet, und welche zuerst von Jacobi entwickelt worden ist.

Aus der Formel:

$$\frac{d^2 \log \vartheta_0(v)}{dv^2} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\right)^2 \frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)}$$

folgen mit leichter Mühe die Relationen:

$$\vartheta_0^{(4)} = \frac{3\vartheta_0''^2}{\vartheta_0} - 2\pi^4.\vartheta_0.\vartheta_2^4.\vartheta_3^4,$$

$$\vartheta_0^{(6)} = \frac{15\vartheta_0''^3}{\vartheta_0^2} - 30\pi^4\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_0'' + 8\pi^6\vartheta_0\vartheta_2^4\vartheta_3^4(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4).$$

Hieraus schliessen wir:

$$\frac{\vartheta_0^{(6)}\vartheta_0^2 - 15\vartheta_0^{(4)3}}{\vartheta_0\vartheta_0^{(4)} - 3\vartheta_0''^2} - 15\vartheta_0'' = -4\pi^2\vartheta_0(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4).$$

Mit dieser Gleichung verbinden wir die bekannte Relation:

$$4\pi^2\vartheta_0^5 = 4\pi^2\vartheta_0(\vartheta_3^4 - \vartheta_2^4),$$

so ergiebt sich die Relation:

$$(\vartheta_0^2\vartheta_0^{(6)} - 15\vartheta_0\vartheta_0''\vartheta_0^{(4)} + 30\vartheta_0''^3)^2 + 32(\vartheta_0\vartheta_0^{(4)} - 3\vartheta_0''^2)^3 = 16\pi^4(\vartheta_0\vartheta_0^{(4)} - 3\vartheta_0''^2)^2\vartheta_0^{10}.$$

Nun ist aber:

$$\vartheta_0'' = 4\pi i \frac{d\vartheta_0}{d\tau},$$

$$\vartheta_0^{(4)} = -16\pi^2 \frac{d^2\vartheta_0}{d\tau^2},$$

$$\vartheta_0^{(6)} = -64\pi^3 i \frac{d^3\vartheta_0}{d\tau^3}.$$

Setzen wir diese Werthe in die obige Differentialgleichung ein, so erhalten wir die gesuchte Jacobi'sche Gleichung in der Form:

$$\left[\vartheta_0^2 \frac{d^3\vartheta_0}{d\tau^3} - 15\vartheta_0 \frac{d\vartheta_0}{d\tau}\frac{d^2\vartheta_0}{d\tau^2} + 30\left(\frac{d\vartheta_0}{d\tau}\right)^3\right]^2 + 32\left(\vartheta_0 \frac{d^2\vartheta_0}{d\tau^2} - 3\frac{d\vartheta_0}{d\tau}\right)^3$$
$$= -\pi^2\vartheta_0^{10}\left(\vartheta_0 \frac{d^2\vartheta_0}{d\tau^2} - 3\frac{d\vartheta_0}{d\tau}\right)^2.$$

§ 48.[21])

Ableitung von Differentialgleichungen, denen die Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente und die Grössen K und K' Genüge leisten, wenn k^2 die unabhängige Veränderliche ist.

Wir haben in dem vorigen Paragraphen τ als unabhängige Veränderliche angesehen. Es ist klar, dass an Stelle von τ eine jede andere Grösse als unabhängige Veränderliche angesehen werden kann, die mit ihr durch irgend eine Relation verbunden ist. Wir wollen als solche die Grösse k^2 wählen, die durch die Gleichung:

$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}$$

definirt ist. Um Gleichungen mit der Unabhängigen k^2 abzuleiten, können wir genau nach derselben Methode wie im vorigen Paragraphen verfahren, nur müssen die Differentialquotienten nach k eingeführt werden.

Dazu bilden wir:

$$\frac{dk}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}.$$

Erwägen wir wiederum die Beziehung:

$$\vartheta_\alpha'' = 4\pi i \frac{d\vartheta_\alpha}{d\tau},$$

so können wir schreiben:

$$\frac{dk}{d\tau} = \frac{i\pi}{2} k\vartheta_0^4,$$

$$\frac{d^2k}{d\tau^2} = -\frac{\pi^2 k\vartheta_0^7}{4}\left(\vartheta_0 + 4k\frac{d\vartheta_0}{dk}\right),$$

. . . .

Es folgt das Resultat, dass die sämmtlichen Differentialquotienten von k nach τ sich ganz und rational durch die Grössen k, ϑ_0 und die Differentialquotienten von ϑ_0 nach k darstellen lassen.

Da nun überdies:

$$\frac{d\vartheta_0}{d\tau} = \frac{d\vartheta_0}{dk}\frac{dk}{d\tau},$$

$$\frac{d^2\vartheta_0}{d\tau^2} = \frac{d^2\vartheta_0}{dk^2}\left(\frac{dk}{d\tau}\right)^2 + \frac{d\vartheta_0}{dk}\frac{d^2k}{d\tau^2}$$

ist, so folgt aus den Werthen, die für die Differentialquotienten der Function $\vartheta_0(v)$ gefunden worden sind, unmittelbar die Differentialgleichung:

$$1)\qquad kk'^4\frac{d^2\vartheta_0}{dk^2} + k'^4\frac{d\vartheta_0}{dk} + \frac{kk'^4}{\vartheta_0}\left(\frac{d\vartheta_0}{dk}\right)^2 + \frac{k\vartheta_0}{2} = 0.$$

Die Gleichung nimmt eine elegantere Form an, wenn wir an Stelle von ϑ_0 die Grösse $\vartheta_0{}^2$ einführen, und zwar lautet dieselbe:

$$kk'^4\frac{d^2\vartheta_0{}^2}{dk^2} + k'^4\frac{d\vartheta_0{}^2}{dk} + k\vartheta_0{}^2 = 0.$$

Erwägen wir ferner die Beziehung:

$$\vartheta_0{}^2 = \frac{Kk'}{2\pi},$$

so finden wir für die Grösse K die Gleichung:

$$2)\qquad k(1-k^2)\frac{d^2K}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{dK}{dk} = kK.$$

Es ist nicht schwer, das zweite Integral derselben mit Hülfe der linearen Transformation zu finden.

In der That, K wie k hängt von τ ab und zwar eindeutig. Wir wenden die Transformation an:

$$a_0 = 0,\ a_1 = -1,\ b_0 = 1,\ b_1 = 0,$$

dann geht k in k' über, K in $iK'\tau$. Nun überzeugt man sich aber unter Hinzunahme der Beziehungen:

$$k^2 + k'^2 = 1,\quad \frac{dk}{dk'} = -\frac{k'}{k},\quad \frac{d^2k}{dk'^2} = -\frac{1}{k^3},$$

dass die Differentialgleichung bei der genannten Operation ungeändert bleibt. Erwägt man andererseits die Beziehung:

$$\tau = \frac{iK'}{K},$$

so folgt als zweites Integral die Grösse K' oder also als allgemeines Integral der Ausdruck:

3) $$cK + c_1 K',$$

worin c und c_1 willkürliche Constanten bedeuten.

Es ist nicht schwer, auf Grund dieser Differentialgleichung Reihenentwickelungen für die Grössen K und iK' aufzustellen. In der That, jedenfalls folgt, dass um den Punkt $k^2 = 0$ herum K in der Form dargestellt werden kann:

$$K = a_0 + a_1 k^2 + a_2 k^4 + \cdots$$

Es folgt dieses einerseits aus dem Umstand, dass durch Umkehrung der Formel:

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} = \frac{16q(1 + q^2 + q^6 + \cdots)^4}{(1 + 2q + 2q^4 + \cdots)^4}$$

q als Potenzreihe von k^2 dargestellt werden kann, deren constantes Glied der Null gleich ist, ferner aus der Beziehung:

$$K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + \cdots)^2.$$

Setzen wir die Reihe für K in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir für die Grössen $a_0, a_1 \ldots$ Recursionsformeln und zwar lauten dieselben:

$$4a_1 = a_0,$$
$$16a_2 = 9a_1,$$
$$\vdots$$
$$(2n)^2 a_n = (2n-1)^2 a_{n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Aus diesen Gleichungen sind alle Constanten mit Ausnahme einer einzigen bestimmt. Diese eine bestimmen wir durch die Bedingung, dass wie $q = 0$ die Grösse $k^2 = 0$ entspricht, so auch umgekehrt $k^2 = 0$, $q = 0$ entsprechen soll oder K gleich $\frac{\pi}{2}$ sein soll.

Unter solchen Umständen erhalten wir für K um den Punkt $k^2 = 0$ herum die Entwickelung:

4) $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

Die Reihe convergirt für alle Werthe von k^2, die dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind — die Werthe, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, lassen wir ununtersucht — und definirt für diese K als analytische Function von k^2. Für die genannten Werthe von k^2 kann sie zur unmittelbaren numerischen Berechnung eines Werthes von K dienen.

Ebenso einfach ist eine Entwickelung für K' aufzustellen. Es besteht die Beziehung:

$$K' = \frac{K}{i}\tau.$$

Nun ist aber:

$$q = \frac{k^2}{16}(b_0 + b_1 k^2 + b_2 k^4 + \cdots)$$

oder also:

$$\log q = \pi i \tau = 2\log\frac{k}{4} + \log(b_0 + b_1 k^2 + \cdots)$$

$$= 2\log\frac{k}{4} + c_1 k^2 + \cdots$$

Damit aber folgt für K':

$$K' = -\frac{2K}{\pi}\log\frac{k}{4} + P(k^2), \tag{5}$$

wo unter $P(k^2)$ eine Potenzreihe von k^2 zu verstehen ist, deren constantes Glied der Null gleich ist.

Die Coefficienten derselben können wiederum vermittelst der Differentialgleichung bestimmt werden. In der That, setzen wir den zuletzt gefundenen Werth von K' in die obige Differentialgleichung ein, so erhalten wir die Beziehung:

$$k(1-k^2)\frac{d^2P}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{dP}{dk} - kP = 4\,\frac{1-k^2}{\pi}\frac{dK}{dk} - \frac{4kK}{\pi} \tag{6}$$

Aus dieser folgt dann mit leichter Mühe die Darstellung:

$$K' = -\frac{2K\log\frac{k}{4}}{\pi} - \left[\frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\left(1+\frac{2}{3.4}\right)k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\left(1+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{5.6}\right)k^6 + \cdots\right]. \tag{7}$$

Auch die in diesem Ausdruck vorkommende Potenzreihe convergirt für die Werthe von k^2, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind, wobei wir die Werthe, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, zunächst ausser Auge lassen.

Es ist nicht schwer, zu sehen, dass wir den Fall eines allgemeinen k auf den soeben betrachteten zurückführen können. Es lehrt das die Theorie der linearen und der Transformation zweiten Grades, wie ganz kurz angedeutet werden möge. In der That, wählen wir die Transformation ersten Grades, bei welcher k^2 in $\frac{1}{k^2}$ übergeht, so kann vermöge derselben der Fall, dass $|k^2| > 1$ ist, auf den Fall zurückgeführt werden, den wir behandelt haben. Ist $|k^2| = 1$, so führt etwa die Transformation zweiten Grades, bei welcher k in $\frac{1-k'}{1+k'}$ übergeht, zum Ziel, mit Ausnahme von $k^2 = 1$.

§ 49.[22])

Anderweite Berechnung eines Werthes von K und K' als Functionen von k^2.

Wir haben im vorigen Paragraphen eine Methode gegeben, wie man zu einem vorgelegten Werthe von k^2 je einen dazugehörenden Werth von K und iK' berechnen kann. Es giebt aber noch andere Methoden. Wir wollen eine derselben kurz andeuten, indem wir in Bezug auf alles Nähere auf das Werk von Scheibner „Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form" verweisen. Dieselbe ist am besten anwendbar, wenn k^2 nicht nur dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist, sondern daneben noch positiv. Wir wollen diese Annahme machen.

Wenden wir die quadratische Transformation an:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1$$

und nennen die den Grössen k, k', K entsprechenden transformirten Grössen resp.

$$\mu, \mu', M,$$

so bestehen, wie seiner Zeit gezeigt, die Beziehungen:

$$\mu = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad \mu' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \quad k = \frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}, \quad k' = \frac{1-\mu}{1+\mu},$$

$$K = \frac{2}{1+k'} M = \frac{2\sqrt{\mu}}{k} M = \frac{\mu'}{\sqrt{k'}} M = (1+\mu) M.$$

Dabei ist μ kleiner als k, wie unmittelbar aus der Gleichung hervorgeht:

$$\mu = k \cdot \frac{k}{(1+k')^2}.$$

Setzen wir diese Operation fort, so erhalten wir eine Reihe von Moduln $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$, die sich mit wachsenden Index unbeschränkt der Null nähern. Es folgt das aus folgendem Kriterium:

Wenn in einer Reihe $u_1, u_2, u_3, \ldots$

$$-1 < \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

ist, so ist $\lim u_n = 0$. Nun ist aber in unserem Falle:

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \frac{\mu_n}{(1+\mu_n')^2} < 1,$$

und ebenso der Grenzwerth kleiner als 1. Damit ist die Behauptung bewiesen. $k^2 = 0$ soll aber $q = 0$ oder also $K = \frac{\pi}{2}$ entsprechen. Hieraus folgt die Darstellung:

$$1)\quad \frac{2K}{\pi} = \frac{2}{1+k'} \cdot \frac{2}{1+\mu'} \cdot \frac{2}{1+\mu_1'} \cdots = (1+\mu)(1+\mu_1)(1+\mu_2)\ldots$$
$$= \sqrt{\frac{\mu' \mu_1' \mu_2' \mu_3' \ldots}{k'}}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich der Werth von K für einen Werth von k, der nicht zu nahe an 1 ist, leicht berechnen.

Wir nehmen zweitens die Grösse:

$$K' = -i\tau K$$

und wenden jetzt die Transformation:

$$a_0 = 1,\quad a_1 = 0,\quad b_0 = 0,\quad b_1 = 2$$

an. Nennen wir dann die den Grössen:

$$k,\ k',\ K,\ K'$$

entsprechenden:

$$\lambda,\ \lambda',\ \Lambda,\ \Lambda',$$

so folgt die Beziehung:

$$K' = \frac{\Lambda' . \lambda}{\sqrt{k}} = 2\Lambda' \frac{\sqrt{\lambda'}}{k'},$$

wobei bekanntlich ist:

$$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad \lambda' = \frac{1-k}{1+k}.$$

Hieraus folgt dann mit leichter Mühe die Productdarstellung:

$$2)\quad \frac{2K'}{\pi} = \sqrt{\frac{\lambda . \lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 \ldots}{k}},$$

so dass wir eine zweite Methode kennen gelernt haben, um K' als Function von k^2 zu berechnen.

§ 50.

Berechnung von q für ein gegebenes k^2.

Wenn vermöge der Methoden der beiden vorigen Paragraphen für einen Werth von k die dazu gehörenden Werthe von K und K' bestimmt sind, so kann der dazu gehörende Werth von τ und damit von q unmittelbar bestimmt werden. Es giebt aber noch andere directe Methoden, die dasselbe leisten. Es möge eine derselben hier besprochen werden, die sich in dem Thomae'schen Werke über elliptische Functionen findet.

Combinirt man die beiden linearen Transformationen, die k in $\frac{1}{k}$ und k in k' überführen, so folgt leicht, dass wir uns auf diejenigen Werthe von k beschränken können, die in dem Segment des Einheitskreises gelegen sind, welches die zur imaginären Achse parallele Gerade durch $k = \frac{1}{2}$ bestimmt und welches den Punkt $k = 0$ enthält.

Wir gehen nun für diese Werthe von der Gleichung aus:

$$\sqrt{k'}\,\vartheta_3 - \vartheta_0 = 0.$$

Durch Division derselben mit $2(1+\sqrt{k'})$ erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} - q + \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}q^4 - q^9 + \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}q^{16}\dots = 0.$$

Für $\sqrt{k'}$ setzen wir diejenige Wurzel, die für $k=0$ den Werth 1 annimmt, ferner bezeichnen wir:

$$\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = l,$$

dann folgt, dass q jedenfalls als Potenzreihe von l dargestellt werden kann, welche kein constantes Glied besitzt, es folgt ferner leicht, dass diese Potenzreihe die Form haben muss:

$$q = a_0 l + a_1 l^5 + a_2 l^9 + \cdots$$

Durch Einsetzen ergeben sich Recursionsformeln, die zur Bestimmung der Coefficienten führen. Man erhält die Reihe:

$$q = \frac{1}{2}l + \frac{2}{2^5}l^5 + \frac{15}{2^9}l^9 + \frac{150}{2^{13}}l^{13} + \frac{1701}{2^{17}}l^{17} + \cdots$$

Es lässt sich zeigen, dass diese Reihe für die vorhin genannten Werthe von k^2 convergirt.

Dazu setzen wir $q = \frac{1}{2}\lambda$, so nimmt die Ausgangsgleichung die Form an:

$$l = \lambda - \frac{l\lambda^4}{2^3} + \frac{\lambda^9}{2^8} - \frac{l\lambda^{16}}{2^{15}}\cdots$$

Die Umkehrung dieser Reihe wird nun, wie mit Hülfe weniger Schlüsse folgt, sicher convergiren für diejenigen $|\lambda| < |s|$, für welche die Umkehrung der Reihe convergirt:

$$l = s - \left(\frac{l}{2^3} + \frac{1}{2^8}\right)(s^2 + s^3 + s^4 + \cdots) = s - \left(\frac{l}{2^3} + \frac{1}{2^8}\right)\frac{s^2}{1-s}.$$

Ueber den Convergenzbezirk der Reihe nach s können aber einige Schlüsse gemacht werden. In der That, wir können die Gleichung auch als quadratische mit der Unbekannten s auffassen. Aus ihr folgt:

$$s = \frac{1 + l \pm \sqrt{1 - \left(2 + \frac{1}{2^6}\right)l + \frac{l^2}{2}}}{2\left(1 + \frac{1}{2^8} + \frac{l}{2^3}\right)}.$$

Es lässt sich s um $l = 0$ herum in eine Potenzreihe entwickeln und zwar reicht der Convergenzbezirk bis zum nächsten Nullpunkt von:

$$1 - \left(2 + \frac{1}{2^6}\right) l + \frac{l^2}{2}.$$

Derselbe hat die Form:

$$l = 2 + \frac{1}{2^6} - \sqrt{2 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{12}}}$$

und ist jedenfalls grösser als $\frac{1}{2}$. Für eben diese Werthe kann auch der Quotient:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2^8} + \frac{l}{2^3}}$$

nach Potenzen von l entwickelt werden, s auch. Unter solchen Umständen folgt, dass die obige Reihe convergiren wird, wenn:

$$\frac{1 - \sqrt[4]{1 - k^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - k^2}} < \frac{1}{2}$$

ist. Das ist aber für die genannten Werthe von k^2 der Fall.

§ 51.

Berechnung aller Werthe von K und K' als Functionen von k^2.

Nachdem in dem Vorangehenden Methoden angegeben worden sind, wie für jedes k^2 einzelne Werthe von K und K' berechnet werden können, wollen wir nun dazu übergehen, alle Werthe zu bestimmen, die zu einem Werthe von k^2 gehören. Wir wollen uns hierbei zunächst mit dem Quotienten:

$$\tau = \frac{iK'}{K}$$

beschäftigen. Es ist klar, dass einem jeden Werth von k^2 unendlich viele Werthe von τ entsprechen werden und zwar haben diese die Form:

$$\frac{b_0 - a_0 \tau}{a_1 \tau - b_1},$$

wenn $a_0 b_1 - b_0 a_1 = 1$ und ferner $a_1 \equiv 1$, $a_1 \equiv 0$, $b_0 \equiv 0$, $b_1 \equiv 1 \mod 2$ ist, denn für diese Werthe bleibt nach den Regeln der linearen Transformation k^2 ungeändert. Es kann nun umgekehrt gezeigt werden, dass hiermit alle Werthe erschöpft sind, die zu einem Werthe von k^2 gehören.

Wir wollen dazu die nothwendigen Bedingungen zwischen den Grössen τ und τ' aufstellen, damit die zugehörenden eindeutig be-

stimmten Werthe der Moduln k^2 und μ^2 einander gleich sind, oder also die Gleichung besteht:

$$k^2 = \mu^2.$$

Denken wir uns dazu für beliebige Werthe v und v' die Functionen

$$\vartheta_\alpha(v,\tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha(v',\tau')$$

gebildet. Diese Functionen sind eindeutig bestimmt, wenn die Grössen v, τ; v', τ' gegeben sind. Unter eben derselben Annahme gehören zu den Argumenten der Thetafunctionen eindeutig bestimmte Argumente der elliptischen Functionen, und zwar bestehen die Relationen:

$$u = Kv, \quad u' = Cv',$$

wo K und C bekannte Werthe besitzen.

Zu vorgelegten Werthsystemen v, τ; v', τ' gehören demnach eindeutig bestimmte Werthe der Functionen $sn(u, k)$, $sn(u', \mu)$; $cn(u, k)$, $cn(u', \mu)$ etc.

Andererseits sind diese Functionen aber eindeutig bestimmt, sobald ihre Argumente und die Grössen k^2 resp. μ^2 gegeben sind. Wenn wir daher die Beziehungen festsetzen:

$$Kv = Cv',$$

so folgt, dass die den vorgelegten Grössen v, τ; v', τ' entsprechenden elliptischen Functionen jedenfalls einander gleich sein müssen. Hieraus folgt, dass die ungerade Thetafunction mit dem Argument v und dem Modul τ jedenfalls zu gleicher Zeit mit der ungeraden Thetafunction vom Argumente v' und dem Modul τ' verschwinden muss.

Nun sind die Nullwerthe der ersteren nach dem früheren:

$$v = r + s\tau$$

der zweiten:

$$v' = r_1 + s_1\tau',$$

wobei r, s, r_1, s_1 beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Setzt man also $v' = 1$, so wird:

$$v = \frac{C}{K} = \alpha + \beta\tau,$$

setzt man $v' = \tau'$, so wird:

$$v = \frac{C}{K}\tau' = \gamma + \delta\tau,$$

wobei α, β, γ, δ vier ganze Zahlen bedeuten. Hieraus folgt:

$$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}.$$

Setzt man umgekehrt $v = 1$, so wird:

$$v' = \frac{K}{C} = \alpha_1 + \beta_1 \tau',$$

setzt man $v = \tau$, so wird:

$$v' = \frac{K}{C}\tau = \gamma_1 + \delta_1 \tau',$$

also:

$$\tau = \frac{\gamma_1 + \delta_1 \tau'}{\alpha_1 + \beta_1 \tau'},$$

ferner:

$$(\alpha + \beta\tau)\alpha_1 + (\gamma + \delta\tau)\beta_1 = 1,$$
$$(\alpha + \beta\tau)\gamma_1 + (\gamma + \delta\tau)\delta_1 = \tau.$$

Da nun τ keinenfalls reell ist, so folgt:

$$\alpha\alpha_1 + \gamma\beta_1 = 1, \quad \beta\alpha_1 + \delta\beta_1 = 0,$$
$$\alpha\gamma_1 + \gamma\delta_1 = 0, \quad \beta\gamma_1 + \delta\delta_1 = 1$$

oder:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1) = 1$$

d. h.

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = \pm 1.$$

Da aber der Factor von i in τ und τ' dasselbe Zeichen besitzt, so folgt:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Damit ist alles gemacht, denn alles andere lehrt die Theorie der linearen Transformation.

Wenn nun das Problem für τ gelöst ist, so ist es für K und K' auch, da ja

$$K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2, \quad iK' = \tau K$$

ist.

Wir finden, dass alle Werthe K die Form haben:

$$\gamma . K + \delta . iK',$$

alle Werthe iK' dagegen:

$$\alpha . K + \beta . iK',$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die frühere Bedeutung haben. Damit ist das Problem, welches am Anfang des Paragraphen gestellt wurde, vollkommen gelöst. Auf die Bedeutung desselben in Bezug auf frühere Theorien braucht nicht näher eingegangen zu werden.

§ 52.[23])

Aufstellung von Differentialgleichungen, denen die zweiten Differentialquotienten der Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente und damit zusammenhängende Grössen Genüge leisten.

Es ist eine Methode angegeben worden, um Differentialgleichungen aufzustellen, denen die Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente

Genüge leisten. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass diese Methode ausreicht, um auch für die Differentialquotienten der Thetafunctionen, wenn die Argumente Null sind, analoge Differentialgleichungen aufzustellen. Wir wollen uns auf den Fall beschränken, dass k als unabhängige Veränderliche aufgefasst wird. Dann hat es keinen Zweck, nach Differentialgleichungen zu fragen, denen die Grösse ϑ'_1 Genüge leistet, denn es ist:

$$\vartheta'_1 = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 = \pi\vartheta_0{}^3\frac{\sqrt{k}}{k'}.$$

Aus jeder Differentialgleichung für die Grösse ϑ_0 kann also eine solche für ϑ'_1 abgeleitet werden und umgekehrt. Anders verhält es sich mit den zweiten Differentialquotienten. Zunächst ist klar, dass man sich auf einen derselben z. B. ϑ''_0 beschränken kann, denn die übrigen können nach bekannten Regeln auf denselben reducirt werden.

Es findet nun die Beziehung statt:

$$\frac{d^{2r}\vartheta_0(v)}{dv^{2r}} = (4\pi i)^{r-1}\frac{d^{r+1}\vartheta_0(v)}{d\tau^{r-1}.\,dv^2}.$$

Die linken Seiten können wir nach bekannten Regeln durch ϑ''_0 selbst und die Grössen ϑ_α ausdrücken, wenn $v = 0$ angenommen wird, die rechte, bei welcher an Stelle von τ die unabhängige Veränderliche k eingeführt werden kann, enthält die Differentialquotienten von ϑ''_0 nach k in sich — von den sonstigen früher näher angegebenen Grössen abgesehen —; wir können unsere Gleichung also unmittelbar in eine Differentialgleichung verwandeln, welcher die Grösse ϑ''_0, aufgefasst als Function von k^2, Genüge leistet. In den Coefficienten treten die Grössen ϑ_0 und k algebraisch auf. Hieraus lassen sich Differentialgleichungen ableiten, in deren Coefficienten die Grösse k allein vorkommt. Dieselben nehmen eine besonders einfache Form an, wenn wir an Stelle von ϑ''_0 die Grösse:

1) $$f_1 = \frac{2}{\pi}\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0{}^3}$$

einführen. In der That, die Differentialbeziehung, von welcher wir Gebrauch zu machen haben, lautet:

$$\vartheta_0^{(4)} = 3\frac{\vartheta''^2_0}{\vartheta_0} - 2\pi^4.\vartheta_0.\vartheta_2{}^4.\vartheta_3{}^4$$

oder wenn wir

2) $$\vartheta''_0 = f$$

setzen:

$$4\pi i\frac{df}{d\tau} = \frac{3f^2}{\vartheta_0} - 2\pi^4\vartheta_0\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4.$$

Somit erhalten wir für f_1 die Gleichung:

$$2\pi^2 i \vartheta_0{}^3 \frac{df_1}{d\tau} = -2\pi^4 \vartheta_0 \,.\, \vartheta_2{}^4 \,.\, \vartheta_3{}^4$$

oder:

$$k\vartheta_0{}^7 \frac{df_1}{dk} = 2\pi\vartheta_0 \,.\, \vartheta_2{}^4 \,.\, \vartheta_3{}^4.$$

Die letzte Gleichung kann geschrieben werden:

3) $$\frac{df_1}{dk} = 4K\frac{k}{k'^3}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung ist es möglich, aus jeder Gleichung, die wir für K aufgestellt haben, eine solche für f_1 aufzustellen. Nun folgt aber leicht, dass umgekehrt auch f_1 sich durch den Differentialquotienten von K und K selbst darstellen lässt. In der That, es ist:

$$K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3{}^2,$$

also folgt:

4) $$\frac{dK}{dk} = -\frac{f_1}{4kk'} + K\frac{k}{k'^2}.$$

Diese Formel leistet das Verlangte. Aus jeder Formel für f_1 können wir eine Formel für K herleiten und umgekehrt. An Stelle von f_1 kann hierbei $f_1 \,.\, F$ gesetzt werden, wobei F irgend eine Function von k ist. Es entsteht unter solchen Umständen eine unendliche Formenmannigfaltigkeit. Wir wollen den folgenden Fall herausgreifen.

Wir setzen:

5) $$E = \frac{f_1}{4}\frac{k'}{k^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0{}^3}\frac{k'}{k^2},$$

dann folgen die beiden Beziehungen:

6) $$\frac{dK}{dk} = K\frac{k}{k'^2} - E\frac{k}{k'^2},$$

7) $$\frac{dE}{dk} = K\frac{1}{kk'^2} - E\frac{k'^2+1}{kk'^2}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt unter Hinzunahme der Differentialgleichung, die wir für K gefunden haben:

$$\frac{dE}{dk} = \frac{2-k^2}{k^2}\frac{dK}{dk} - \frac{K}{k},$$

$$\frac{d^2E}{dk^2} = \frac{-6+10k^2-2k^4}{k'^2k^3}\frac{dK}{dk} + \frac{3-2k^2}{k^2k'^2}K,$$

oder also wir erhalten die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

8) $$kk'^2\frac{d^2E}{dk^2} + (3-5k^2)\frac{dE}{dk} - 3kE = 0.$$

Die Integration derselben ist vollkommen durchgeführt. Das eine Integral ist, wie soeben bemerkt:

$$9)\qquad E = K - \frac{k'^2}{k}\frac{dK}{dk},$$

das andere also, welches wir durch E_1 bezeichnen wollen:

$$10)\qquad E_1 = K' - \frac{k'^2}{k}\frac{dK'}{dk}.$$

Bei der Differentialgleichung für K entstanden die beiden Integrale auseinander durch Vertauschung von k und k'. Hier verhält sich die Sache anders. Nennen wir die Grösse, die aus E durch Vertauschung von k und k' entsteht E', so folgt:

$$E' = K' - \frac{k^2}{k'}\frac{dK'}{dk'}$$

oder also:

$$E' = K' + k\frac{dK'}{dk},$$

so dass zwischen E_1 und E' die Beziehung stattfindet:

$$11)\qquad E_1 = \frac{K' - k'^2 . E'}{k^2}.$$

Zwischen den Grössen E, E_1, K, K' besteht eine einfache Relation, die unmittelbar aus den vorhin entwickelten Gleichungen folgt und lautet:

$$KE_1 - EK' = \frac{\pi}{2k^2},$$

oder wenn wir:

$$E = \frac{J}{k^2},\quad E_1 = \frac{J_1}{k^2}$$

setzen:

$$12)\qquad KJ_1 - JK' = \frac{\pi}{2}.$$

Es ist dieses die Legendre'sche Relation.

Wir könnten nun in ähnlicher Weise die höheren Differentialquotienten für die Nullwerthe der Argumente untersuchen, indessen kann das zu keinen prinzipiell neuen Resultaten führen, da dieselben sich rational durch die vorhin untersuchten Grössen darstellen lassen.

§ 53.[24])

Ableitung von partiellen Differentialgleichungen für die Functionen $Al_\alpha(u)$ und Entwickelung derselben in Potenzreihen.

Aehnlich wie wir Differentialgleichungen gefunden haben, denen die Thetafunctionen und gewisse Verbindungen resp. Ableitungen derselben für die Nullwerthe der Argumente Genüge leisten, ähnlich können

wir für die allgemeinen Thetafunctionen und andere mit ihnen zusammenhängende Functionen Differentialgleichungen herstellen. Dieselben werden in totale und partielle Differentialgleichungen zerfallen. Es hat keine Schwierigkeit, für die Thetafunctionen totale Differentialgleichungen aufzustellen, indem man sie als allein abhängig von v ansieht, indessen sind die Formen so wenig einfacher Natur und bieten so wenig neue Momente dar, dass wir von ihrer Aufstellung absehen können. Bildet man Quotienten je zweier Thetafunctionen, d. h. elliptische Functionen, so gestaltet sich die Sache ungemein übersichtlich und einfach; indessen sind die hierauf bezüglichen Formeln entwickelt, so dass wir nichts Neues hinzuzufügen haben. Anders ist es mit den partiellen Differentialgleichungen. Für diese haben wir den Ausgangspunkt auch schon gefunden, nämlich die Gleichung:

$$1)\qquad \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_\alpha(v)}{\partial \tau}.$$

Dieselbe zeigte sich für die Differentialgleichungen, denen die Constanten Genüge leisten, fundamental; sie ist es ebenso für die zuletzt charakterisirten. Wir wollen mit ihrer Hülfe Differentialgleichungen herleiten, denen die Functionen $Al_\alpha(u)$ Genüge leisten.

Dazu bringen wir sie in die Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v)}{\partial v^2} = -2\pi^2 k \vartheta_0^4 \frac{\partial \vartheta_\alpha(v)}{\partial k}.$$

Nun ist:

$$2)\qquad Al_\alpha(u) = \frac{\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_\alpha} e^{-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}, \qquad \alpha = 0,\ 2,\ 3.$$

$$3)\qquad Al_1(u) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2 \cdot \vartheta_0} \vartheta_1(v) e^{-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}},$$

während zwischen v und u die Beziehung besteht:

$$u = \pi \vartheta_3^2 v.$$

Die letzten Betrachtungen geben dann unmittelbar die Mittel an die Hand, um für die vier Functionen $Al_\alpha(u)$ partielle Differentialgleichungen aufzustellen. Dieselben lauten:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 Al_0(u)}{\partial u^2} + 2k^2 u \dfrac{\partial Al_0(u)}{\partial u} + 2k(1-k^2)\dfrac{\partial Al_0(u)}{\partial k} + k^2 u^2 Al_0(u) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 Al_1(u)}{\partial u^2} + 2k^2 u \dfrac{\partial Al_1(u)}{\partial u} + 2k(1-k^2)\dfrac{\partial Al_1(u)}{\partial k} + (1-k^2+k^2u^2) Al_1(u) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 Al_2(u)}{\partial u^2} + 2k^2 u \dfrac{\partial Al_2(u)}{\partial u} + 2k(1-k^2)\dfrac{\partial Al_2(u)}{\partial k} + (1+k^2u^2) Al_2(u) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 Al_3(u)}{\partial u^2} + 2k^2 u \dfrac{\partial Al_3(u)}{\partial u} + 2k(1-k^2)\dfrac{\partial Al_3(u)}{\partial k} + (k^2+k^2u^2) Al_3(u) = 0. \end{cases}$$

Diese Differentialgleichungen zeigen sich nun für die Entwickelung der Functionen $Al_a(u)$ in Potenzreihen von Bedeutung. Zunächst folgt aus der linearen Transformation und zwar aus dem dritten Falle derselben, dass die Beziehungen bestehen müssen:

$$Al_0\left(ku, \frac{1}{k}\right) = Al_0(u, k); \quad Al_2\left(ku, \frac{1}{k}\right) = Al_3(u, k);$$

$$Al_1\left(ku, \frac{1}{k}\right) = kAl_1(u, k); \quad Al_3\left(ku, \frac{1}{k}\right) = Al_2(u, k).$$

Es folgt nun leicht, dass wir für die vier Functionen die folgenden Ansätze machen können.

$$5) \quad \begin{cases} Al_0(u) = 1 - \sum (-1)^{m+n} a_{m,n} k^{2m+2} \dfrac{u^{2m+2n+4}}{(2m+2n+4)!}, \\ Al_1(u) = \sum (-1)^{m+n} b_{m,n} k^{2m} \dfrac{u^{2m+2n+1}}{(2m+2n+1)!}, \\ Al_2(u) = 1 - \sum (-1)^{m+n} c_{m,n} k^{2m} \dfrac{u^{2m+2n+2}}{(2m+2n+2)!}, \\ Al_3(u) = 1 - \sum (-1)^{m+n} c_{m,n} k^{2n+2} \dfrac{u^{2m+2n+2}}{(2m+2n+2)!}. \end{cases}$$

Setzen wir diese Entwickelungen in unsere Differentialgleichungen ein, so ergeben sich die Beziehungen:

$$a_{m,n} = (4m+4)a_{m,n-1} + (2n+4)a_{m-1,n} - (2m+2n+1)(2m+2n+2)a_{m-1,n-1},$$
$$b_{m,n} = (4m+1)b_{m,n-1} + (2n+1)b_{m-1,n} - (2m+2n+2)(2m+2n-1)b_{m-1,n-1},$$
$$c_{m,n} = (4m+1)c_{m,n-1} + (4n+4)c_{m-1,n} - (2m+2n-1)(2m+2n)c_{m-1,n-1}.$$

In den einfachsten Fällen ist:

$$a_{0,0} = 2, \quad b_{0,0} = 1, \quad c_{0,0} = 1, \quad c_{1,0} = 2, \quad c_{0,1} = 1,$$

ferner:

$$a_{m,n} = a_{n,m}, \quad b_{m,n} = b_{n,m};$$

daneben ist in diesen Formeln einem jeden Coefficienten, bei dem ein Index negativ ist, der Werth Null beizulegen.

Wir können unsere Formeln auch schreiben:

$$6) \quad \begin{cases} Al_0(u) = 1 - A_2 \dfrac{u^4}{4!} + A_3 \dfrac{u^6}{6!} \cdots (-1)^{m-1} A_m \dfrac{u^{2m}}{(2m)!} \cdots \\ Al_1(u) = u - B_1 \dfrac{u^3}{3!} + B_2 \dfrac{u^5}{5!} \cdots (-1)^m B_m \dfrac{u^{2m+1}}{(2m+1)!} \cdots \\ Al_2(u) = 1 - C_1 \dfrac{u^2}{2} + C_2 \dfrac{u^4}{4!} + \cdots (-1)^m C_m \dfrac{u^{2m}}{(2m)!} \cdots \\ Al_3(u) = 1 - D_1 \dfrac{u^2}{2} + D_2 \dfrac{u^4}{4!} \cdots (-1)^m D_m \dfrac{u^{2m}}{(2m)!} \cdots, \end{cases}$$

wobei in den einfachsten Fällen wird:

$$A_2 = 2k^2,$$
$$A_3 = 8(k^2 + k^4),$$
$$A_4 = 32(k^2 + k^6) + 68k^4,$$
$$A_5 = 128(k^2 + k^8) + 480(k^4 + k^6),$$
$$A_6 = 512(k^2 + k^{10}) + 3008(k^4 + k^8) + 5400k^6,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$B_1 = 1 + k^2,$$
$$B_2 = 1 + k^4 + 4k^2,$$
$$B_3 = 1 + k^6 + 9(k^2 + k^4),$$
$$B_4 = 1 + k^8 + 16(k^2 + k^6) - 6k^4,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$C_1 = 1,$$
$$C_2 = 1 + 2k^2,$$
$$C_3 = 1 + 6k^2 + 8k^4,$$
$$C_4 = 1 + 12k^2 + 60k^4 + 32k^6,$$
$$C_5 = 1 + 20k^2 + 348k^4 + 448k^6 + 128k^8,$$
$$C_6 = 1 + 30k^2 + 2372k^4 + 4600k^6 + 2880k^8 + 512k^{10},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$D_1 = k^2,$$
$$D_2 = 2k^2 + k^4,$$
$$D_3 = 8k^2 + 6k^4 + k^6,$$
$$D_4 = 32k^2 + 60k^4 + 12k^6 + k^8,$$
$$D_5 = 128k^2 + 448k^4 + 348k^6 + 20k^8 + k^{10},$$
$$D_6 = 512k^2 + 2880k^4 + 4600k^6 + 2372k^8 + 30k^{10} + 12^{12},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die Darstellungen der Functionen $Al_\alpha(u)$ auch dazu dienen können, um die Entwickelungen der elliptischen Functionen $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ zu erhalten.

§ 54.[25]

Die Multiplication der Theta- und der elliptischen Functionen. Erste Methode.

In einem der früheren Paragraphen ist bemerkt worden, dass zu jeder Transformation eine supplementäre gehört, die zur Multiplication führt. Es folgt aus den dort angestellten Betrachtungen, dass die Anwendung der beiden Transformationen den Modul ungeändert lässt, während das Argument den $n$fachen Werth des ursprünglichen annimmt.

Unter solchen Umständen können wir als Aufgabe der Multiplication der elliptischen Functionen die Aufgabe ansehen, die elliptischen Functionen mit $n$fachem Argument, insbesondere die Functionen $sn(nu)$, $cn(nu)$, $dn(nu)$ durch die ursprünglichen auszudrücken. Auch hier basiren wir die Lösung dieser Aufgabe auf die Lösung der entsprechenden für die Thetafunctionen oder also wir stellen zunächst die Aufgabe, die Functionen $\vartheta_\alpha(nv)$ durch die ursprünglichen Thetafunctionen darzustellen.

Das Problem kann auf mannigfachem Wege gelöst werden. Zunächst giebt das Hermite'sche Transformationsprincip unmittelbar eine Lösung desselben.

In der That, es folgt unmittelbar, dass die Functionen $\vartheta_\alpha(nv)$ Thetafunctionen von der Ordnungszahl n^2 sind, deren Charakteristik bei ungeradem n gleich der Charakteristik von $\vartheta_\alpha(v)$, bei geradem n dagegen gleich der Charakteristik von $\vartheta_3(v)$ ist. Daneben folgt, dass $\vartheta_1(nv)$ ungerade, die drei übrigen Functionen dagegen gerade sind. Hieraus folgt dann die Darstellung derselben durch Thetafunctionen nach den bekannten Regeln und zwar erhalten wir bei geradem n:

$$1) \qquad \vartheta_1(nv) = \vartheta_0(v)\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v)\,F^{\frac{n^2}{2}-2}[\vartheta^2_{\varepsilon_1}(v),\,\vartheta^2_{\varepsilon_2}(v)],$$

$$2) \qquad \vartheta_\alpha(nv) = F^{\frac{n^2}{2}}[\vartheta^2_{\varepsilon_1}(v),\,\vartheta^2_{\varepsilon_2}(v)], \qquad \alpha = 0, 2, 3,$$

bei ungeradem n dagegen:

$$3) \qquad \vartheta_\beta(nv) = \vartheta_\beta(v)\,F^{\frac{n^2-1}{2}}[\vartheta^2_{\varepsilon_1}(v),\,\vartheta^2_{\varepsilon_2}(v)], \qquad \beta = 0, 1, 2, 3.$$

Hierbei bedeuten ε_1 und ε_2 zwei beliebige, aber von einander verschiedene Charakteristiken.

Zu demselben Resultate gelangen wir durch Anwendung des Additionstheorems. Dieselbe hat überdies den Vortheil, dass die Natur der Coefficienten klar hervortritt.

In der That, aus den Formeln desselben folgt unmittelbar das System von Gleichungen:

$$4) \quad \begin{cases} \vartheta_0^3 . \vartheta_0(2mv) = \vartheta_0^4(mv) - \vartheta_1^4(mv), \\ \vartheta_0 . \vartheta_2 . \vartheta_3 . \vartheta_1(2mv) = 2\vartheta_0(mv)\,\vartheta_1(mv)\,\vartheta_2(mv)\,\vartheta_3(mv), \\ \vartheta_0^2 . \vartheta_2 . \vartheta_2(2mv) = \vartheta_2^2(mv)\,\vartheta_0^2(mv) - \vartheta_3^2(mv)\,\vartheta_1^2(mv), \\ \vartheta_0^2 . \vartheta_3 . \vartheta_3(2mv) = \vartheta_3^2(mv)\,\vartheta_0^2(mv) - \vartheta_2^2(mv)\,\vartheta_1^2(mv), \end{cases}$$

ferner:

$$5) \quad \begin{cases} \vartheta_0^2 . \vartheta_0[(2m+1)v]\,\vartheta_0(v) = \vartheta_0^2[(m+1)v] . \vartheta_0^2(mv) - \vartheta_1^2[(m+1)v] . \vartheta_1^2(mv), \\ \vartheta_0^2 . \vartheta_1[(2m+1)v]\,\vartheta_1(v) = \vartheta_1^2[(m+1)v] . \vartheta_0^2(mv) - \vartheta_0^2[(m+1)v] . \vartheta_1^2(mv), \\ \vartheta_0^2 . \vartheta_2[(2m+1)v]\,\vartheta_2(v) = \vartheta_2^2[(m+1)v] . \vartheta_0^2(mv) - \vartheta_3^2[(m+1)v] . \vartheta_1^2(mv), \\ \vartheta_0^2 . \vartheta_3[(2m+1)v]\,\vartheta_3(v) = \vartheta_3^2[(m+1)v] . \vartheta_0^2(mv) - \vartheta_2^2[(m+1)v] . \vartheta_1^2(mv). \end{cases}$$

Das Additionstheorem hätte noch zu andern Darstellungen Anlass gegeben. Die hier entwickelten Formeln ergeben sich, wenn an Stelle der Argumente der Thetafunctionen in dem Additionstheorem gesetzt wird mv und mv resp. $(m+1)v$ und mv. Wir können aber allgemein an Stelle der Argumente setzen ru und su, es ergeben sich dann complicirtere Verhältnisse, die von Kronecker untersucht worden sind. Hierauf soll nicht näher eingegangen werden.

Aus den aufgestellten Formeln folgt nun zunächst wiederum, dass die Thetafunctionen mit $n$fachem Argument sich als ganze homogene Functionen von der Ordnungszahl n^2 der ursprünglichen Thetafunctionen darstellen lassen, es können aber überdies Schlüsse über die Natur der Coefficienten gezogen werden. In der That, führen wir an Stelle der Functionen $\vartheta_\alpha(v)$ die Functionen $Al_\alpha(u)$ ein, so nehmen die obigen Formeln die folgende Gestalt an:

$$6)\quad\begin{cases}
Al_0(2mu) = Al_0^4(mu) - k^2 . Al_1^4(mu),\\
Al_1(2mu) = 2Al_0(mu)Al_1(mu)Al_2(mu)Al_3(mu),\\
Al_2(2mu) = Al_2^2(mu)Al_0^2(mu) - Al_3^2(mu)Al_1^2(mu),\\
Al_3(2mu) = Al_3^2(mu)Al_0^2(mu) - k^2Al_2^2(mu)Al_1^2(mu),\\
Al_0[(2m+1)u]Al_0(u) = Al_0^2[(m+1)u]Al_0^2(mu) - k^2Al_1^2[(m+1)u]Al_1^2(mu),\\
Al_1[(2m+1)u]Al_1(u) = Al_1^2[(m+1)u]Al_0^2(mu) - Al_1^2(mu)Al_0^2[(m+1)u],\\
Al_2[(2m+1)u]Al_2(u) = Al_2^2[(m+1)u]Al_0^2(mu) - Al_2^2[(m+1)u]Al_1^2(mu),\\
Al_3[(2m+1)u]Al_3(u) = Al_3^2[(m+1)u]Al_0^2(mu) - k^2Al_2^2[(m+1)u]Al_1^2(mu).
\end{cases}$$

Diese Formeln geben successive die Bestimmung der Functionen $Al_\alpha(2u)$, $Al_\alpha(3u)$ etc. und hierbei ist es klar, dass die Coefficienten sich ganz und rational durch die eine Grösse k^2 darstellen lassen, mit andern Worten, wir erhalten den

Lehrsatz: Die Functionen $Al_\alpha(nu)$ sind ganze rationale homogene Functionen der ursprünglichen Functionen $Al_\alpha(u)$ von der Ordnungszahl n^2. Die Coefficienten lassen sich ganz und rational durch k^2 ausdrücken, so zwar, dass die Zahlencoefficienten ganze rationale Zahlen sind.

Dividiren wir die rechten und linken Seiten dieser Gleichungen durch $Al_0^{n^2}(u)$, so erhalten wir, wenn wir für den Augenblick schreiben:

$$snu = x, \quad cnu = y, \quad dnu = z,$$

für ein gerades n die Ausdrücke:

$$
7)\quad \begin{cases}
\dfrac{Al_0(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = A(x^2) = A'(y^2) = A''(z^2), & A(0) = 1,\\[2mm]
\dfrac{Al_1(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = xyz\,B(x^2) = xyz\,B'(y^2) = xyz\,B''(z^2), & B(0) = n,\\[2mm]
\dfrac{Al_2(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = C(x^2) = C'(y^2) = C''(z^2), & C(0) = 1,\\[2mm]
\dfrac{Al_3(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = D(x^2) = D'(y^2) = D''(z^2), & D(0) = 1,
\end{cases}
$$

für ein ungerades n dagegen:

$$
8)\quad \begin{cases}
\dfrac{Al_0(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = A(x^2) = A'(y^2) = A''(z^2), & A(0) = 1,\\[2mm]
\dfrac{Al_1(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = xB(x^2) = xB'(y^2) = xB''(z^2), & B(0) = n,\\[2mm]
\dfrac{Al_2(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = yC(x^2) = yC'(y^2) = yC''(z^2), & C(0) = 1,\\[2mm]
\dfrac{Al_3(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = zD(x^2) = zD'(y^2) = zD''(z^2), & D(0) = 1,
\end{cases}
$$

wobei A, B, C, D ganze rationale Functionen ihrer Argumente sind, deren Grade unmittelbar zu bestimmen sind. In Bezug auf die Coefficienten gilt das früher Bemerkte.

Die lineare Transformation giebt einige elegante Eigenschaften dieser Functionen. In der That, schreiben wir:

$$
9)\quad \begin{cases}
A(x^2) = \sum P_m x^{2m} = \sum P'_m y^{2m} = \sum P''_m z^{2m},\\
B(x^2) = \sum Q_m x^{2m} = \sum Q'_m y^{2m} = \sum Q''_m z^{2m},\\
C(x^2) = \sum R_m x^{2m} = \sum R'_m y^{2m} = \sum R''_m z^{2m},\\
D(x^2) = \sum S_m x^{2m} = \sum S'_m y^{2m} = \sum S''_m z^{2m},
\end{cases}
$$

so sind die Grössen P, Q, R, S ganze rationale Functionen von k^2. Wir wollen nun den dritten Fall der linearen Transformation anwenden, specieller gesagt an Stelle von u und k uns ku und $\frac{1}{k}$ gesetzt denken, dann folgt:

$$
10)\quad \begin{cases}
P_m(k) = k^{2m} P_m\left(\frac{1}{k}\right), & P'_m(k) = P''_m\left(\frac{1}{k}\right),\\[2mm]
Q_m(k) = k^{2m} Q_m\left(\frac{1}{k}\right), & Q'_m(k) = Q''_m\left(\frac{1}{k}\right),\\[2mm]
R_m(k) = k^{2m} S_m\left(\frac{1}{k}\right), & R'_m(k) = S''_m\left(\frac{1}{k}\right),\\[2mm]
S_m(k) = k^{2m} R_m\left(\frac{1}{k}\right), & S'_m(k) = R''_m\left(\frac{1}{k}\right).
\end{cases}
$$

Aus diesen Formeln folgt, dass die Functionen P_m, P'_m, Q_m, Q'_m, R_m, R'_m, S_m, S'_m ganze Functionen von k^2 höchstens vom Grade m sind, dass ferner P_m und Q_m reciprok in Bezug auf k sich verhalten.

Einige weitere Eigenschaften folgen durch Substitution halber Perioden und mögen ganz kurz angegeben werden. Setzen wir an Stelle von $v : v + \frac{\tau}{2}$ oder, was dasselbe sagt, an Stelle von $u : u + iK'$, so gehen die Functionen $Al_\alpha(u)$ in bestimmter Weise in einander über. Bei den Functionen $Al_\alpha(nu)$ dagegen muss unterschieden werden, ob n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Es folgen dann mit leichter Mühe die Beziehungen:

I. $n \equiv 0 \mod 2.$

$$11)\quad \begin{cases} A(x^2) = (-1)^{\frac{n}{2}}(kx^2)^{\frac{n^2}{2}} A\left(\frac{1}{k^2x^2}\right), \\ B(x^2) = (-1)^{\frac{n-2}{2}}(kx^2)^{\frac{n^2-4}{2}} B\left(\frac{1}{k^2x^2}\right), \\ C(x^2) = (kx^2)^{\frac{n^2}{2}} C\left(\frac{1}{k^2x^2}\right), \\ D(x^2) = (kx^2)^{\frac{n^2}{2}} D\left(\frac{1}{k^2x^2}\right). \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich, indem man x unendlich gross werden lässt, die Coefficienten der höchsten Potenzen in A, B, C, D und zwar resp. gleich:

$$(-1)^{\frac{n}{2}}(k)^{\frac{n^2}{2}};\quad (-1)^{\frac{n-2}{2}} n k^{\frac{n^2-4}{2}},\quad k^{\frac{n^2}{2}},\quad k^{\frac{n^2}{2}}.$$

II. $n \equiv 1 \mod 2.$

$$12)\quad \begin{cases} A(x^2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(kx^2)^{\frac{n^2-1}{2}} B\left(\frac{1}{k^2x^2}\right), \\ B(x^2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(kx^2)^{\frac{n^2-1}{2}} A\left(\frac{1}{k^2x^2}\right), \\ C(x^2) = (kx^2)^{\frac{n^2-1}{2}} D\left(\frac{1}{k^2x^2}\right), \\ D(x^2) = (kx^2)^{\frac{n^2-1}{2}} C\left(\frac{1}{k^2x^2}\right). \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich für die höchsten Coefficienten in A, B, C, D die Werthe:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} n(k)^{\frac{n^2-1}{2}},\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} n(k)^{\frac{n^2-1}{2}},\quad (k)^{\frac{n^2-1}{2}},\quad (k)^{\frac{n^2-1}{2}}.$$

Im Falle eines ungeraden n kann man die vier Polynome A, B, C, D vermöge der Anwendung anderer Substitutionen halber Perioden auf eines zurückführen, und zwar ergeben sich die Resultate:

$$13)\quad \begin{cases} B(x^2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{k^2}{k'}\right)^{\frac{n^2-1}{2}} C\left(\frac{y^2}{z^2}\right), \\ \quad\quad = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{k}{k'}y^2\right)^{\frac{n^2-1}{2}} D\left(\frac{z^2}{y^2}\right), \\ \quad\quad = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(kx^2)^{\frac{n^2-1}{2}} A\left(\frac{1}{k^2x^2}\right). \end{cases}$$

So haben wir eine Reihe von Eigenschaften gefunden, welche für die wirkliche Berechnung der Functionen A, B, C, D von Bedeutung sind. Wir können aber überdies Regeln entwickeln, mit deren Hülfe die Grössen A, B, C, D, die zu höheren Werthen von n gehören, aus solchen berechnet werden können, die zu niederen gehören. In der That, nehmen wir dazu die Formeln, die wir für $Al_a(2mu)$ vorhin gefunden, so ergeben dieselben für ein gerades m die folgenden Relationen — wenn wir uns die Grössen A, B, C, D mit entsprechendem Index versehen denken: —

$$14)\quad \begin{cases} A_{2m} = A_m^4 - k^2.x^4.y^4.z^4.B_m^4, \\ B_{2m} = 2A_m.B_m.C_m.D_m, \\ C_{2m} = C_m^2.A_m^2 - x^2.y^2.z^2.B_m^2.D_m^2, \\ D_{2m} = D_m^2.A_m^2 - k^2.x^2.y^2.z^2.B_m^2.C_m^2. \end{cases}$$

Ist dagegen m ungerade, so wird:

$$15)\quad \begin{cases} A_{2m} = A_m^4 - k^2.x^4.B_m^4, \\ B_{2m} = 2A_m.B_m.C_m.D_m, \\ C_{2m} = y^2.C_m^2.A_m^2 - x^2.z^2.B_m^2.D_m^2, \\ D_{2m} = z^2.D_m^2.A_m^2 - k^2.x^2.y^2.B_m^2.C_m^2. \end{cases}$$

Aehnlich folgt für ein gerades m:

$$16)\quad \begin{cases} A_{2m+1} = A_{m+1}^2.A_m^2 - k^2.x^4.y^2.z^2.B_{m+1}^2.B_m^2, \\ B_{2m+1} = B_{m+1}^2.A_m^2 - y^2.z^2.B_m^2.A_{m+1}^2, \\ C_{2m+1} = C_{m+1}^2.A_m^2 - x^2.z^4.D_{m+1}^2B_m^2, \\ D_{2m+1} = D_{m+1}^2.A_m^2 - k^2.x^2.y^4.B_m^2.C_{m+1}^2, \end{cases}$$

für ein ungerades m dagegen wird:

$$17)\quad \begin{cases} A_{2m+1} = A_{m+1}^2.A_m^2 - k^2.x^4.y^2.z^2B_{m+1}^2.B_m^2, \\ B_{2m+1} = y^2.z^2.B_{m+1}^2.A_m^2 - B_m^2.A_{m+1}^2, \\ y^2C_{2m+1} = C_{m+1}^2.A_m^2 - x^2B_m^2D_{m+1}^2, \\ z^2D_{2m+1} = D_{m+1}^2.A_m^2 - k^2x^2B_m^2.C_{m+1}^2. \end{cases}$$

Andere Formen des Additionstheorems würden andere Formeln geben, die aber nicht weiter ausgeführt zu werden brauchen.

Ausser dem Additionstheorem können auch noch die quadratischen Beziehungen, die zwischen je drei Thetafunctionen bestehen, dazu dienen, um Beziehungen zwischen den Grössen A, B, C, D herzustellen. Wir greifen die folgenden heraus.

Es sei der Index ein gerader, so wird:

$$18)\qquad A^2 = C^2 + x^2 . y^2 . z^2 . B^2 - D^2 + k^2 . x^2 . y^2 . z^2 . B^2,$$

es sei zweitens der Index ein ungerader, so wird:

$$19)\qquad A^2 = y^2 C^2 + x^2 B^2 - z^2 . D^2 + k^2 . x^2 . B^2.$$

Es sind dieses die wichtigsten Beziehungen, die zwischen den eingeführten Grössen bestehen und mit den vorhandenen Mitteln abgeleitet werden können. Mit ihrer Hülfe ist es leicht, in den einfachsten Fällen die Functionen wirklich zu berechnen. Es wird:

$$A_2 = 1 - k^2 . x^2,$$
$$B_2 = 2,$$
$$C_2 = 1 - 2x^2 + k^2 x^4,$$
$$D_2 = 1 - 2k^2 x^2 + k^2 x^4,$$
$$A_3 = 1 - 6k^2 x^4 + 4k^2(1 + k^2)x^6 - 3k^4 x^8,$$
$$B_3 = 3 - 4(1 + k^2)x^2 + 6k^2 x^4 - k^4 x^8,$$
$$C_3 = 1 - 4x^2 + 6k^2 x^4 - 4k^2 x^6 + k^4 x^8,$$
$$D_3 = 1 - 4k^2 x^2 + 6k^2 x^4 - 4k^2 x^6 + k^4 x^8,$$
$$A_4 = 1 - 20k^2 x^4 + 32(1 + k^2)k^2 x^6 - 2(8 + 29k^2 + 8k^4)k^2 x^8 + 32(1 + k^2)k^4 x^{10} - 20k^6 x^{12} + k^8 x^{16},$$
$$B_4 = 4 - 8(1 + k^2)x^2 + 20k^2 x^4 - 8(1 - k^2)k^2 x^6 - 20k^4 x^8 + 8(1 + k^2)k^2 x^{10} - 4k^6 x^{12},$$
$$C_4 = 1 - 8x^2 + (8 + 5k^2)x^4 - 8(3 + 4k^2)k^2 x^6 + 2(27 + 2k^2)k^4 x^8 - 8(3 + 4k^2)k^4 x^{10} + (8 + 5k^2)k^4 x^{12} - 8k^6 . x^{14} + k^8 x^{16},$$
$$D_4 = 1 - 8k^2 x^2 + 4(5 + 2k^2)k^2 x^4 - 8(4 + 3k^2)k^2 x^6 + 2(8 + 27k^2 + 3k^4)k^2 x^8 - 8(4 + 3k^2)k^4 x^{10} + 4(5 + 2k^2)k^6 x^{12} - 8k^8 . x^{14} + k^8 . x^{16}.$$

Die Formeln für die elliptischen Functionen folgen unmittelbar durch Division aus den aufgestellten, so dass von ihnen abgesehen werden kann.

§ 55.

Entwickelung der Jacobi'schen Methode der Multiplication.

Jacobi hat eine Differentialgleichung aufgestellt, mit deren Hülfe die Functionen A, B, C, D berechnet werden können.

Die vier Functionen:

$$w = Al_0(u),\quad w_1 = \sqrt{k}\,Al_1(u),\quad w_2 = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,Al_2(u),\quad w_3 = \sqrt{\frac{1}{k'}}\,Al_3(u)$$

leisten, wie aus dem früheren leicht folgt, einer und derselben partiellen Differentialgleichung Genüge:

$$1)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial w}{\partial u} + 2kk'^2\frac{\partial w}{\partial k} + k^2u^2 w = 0.$$

Hieraus folgt, dass wenn wir die Bezeichnung einführen:

$$W = Al_0(nu),\quad W_1 = \sqrt{k}\,Al_1(nu),\quad W_2 = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,Al_2(nu),\quad W_3 = \sqrt{\frac{1}{k'}}\,Al_3(nu),$$

die vier Functionen W, W_1, W_2, W_3 der Differentialgleichung Genüge leisten:

$$2)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + 2n^2k^2u\frac{\partial W}{\partial u} + 2n^2kk'^2\frac{\partial W}{\partial k} + n^4k^2u^2\,W = 0.$$

Da nun allgemein ist:

$$\frac{\partial^2 \log w}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log w}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2},$$

so können die beiden aufgestellten Differentialgleichungen geschrieben werden:

$$3)\qquad \frac{\partial^2 \log w}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log w}{\partial u}\right)^2 + 2k^2u\frac{\partial \log w}{\partial u} + 2kk'^2\frac{\partial \log w}{\partial k} + k^2u^2 = 0,$$

$$4)\qquad \frac{\partial^2 \log W}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log W}{\partial u}\right)^2 + 2n^2k^2u\frac{\partial \log W}{\partial u} + 2n^2kk'^2\frac{\partial \log W}{\partial k} + n^4k^2u^2 = 0.$$

Wir wollen nun setzen:

$$5)\qquad V_\alpha = \frac{W_\alpha}{Al_0^{n^2}(u)},$$

so nimmt die Differentialgleichung für V die Gestalt an:

$$\frac{\partial^2 \log V}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)^2 + 2n^2\left(\frac{\partial \log w}{\partial u} + k^2u\right)\frac{\partial \log V}{\partial u} + 2n^2kk'^2\frac{\partial \log V}{\partial k} - n^2(n^2-1)\frac{\partial^2 \log V}{\partial u^2} = 0$$

oder auch, da die Beziehung besteht:

$$\frac{\partial^2 \log w}{\partial u^2} = -k^2 sn^2 u,$$

$$6)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2n^2\left(\frac{\partial \log w}{\partial u} + k^2u\right)\frac{\partial V}{\partial u} + 2n^2kk'^2\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2sn^2u\,V = 0.$$

Nun setzen wir:

$$7)\qquad x_1 = \frac{w_1}{w} = \sqrt{k}\,sn\,u$$

und sehen V als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x_1 und k an.

Da die Beziehungen bestehen:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial k} = \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k},$$

so nimmt die Differentialgleichung die Gestalt an:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \left[\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + 2n^2\left(\frac{\partial \log w}{\partial u} + k^2u^2\right)\frac{\partial x_1}{\partial u} + 2n^2kk'^2\frac{\partial x_1}{\partial k}\right]\frac{\partial V}{\partial x_1}$$
$$+ 2n^2kk'^2\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2 sn^2 u\, V = 0.$$

Für die Grösse x_1 ergiebt sich aus dem vorhin Bemerkten unmittelbar die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \log x_1}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log x_1}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \log w}{\partial u} + k^2 u\right)\frac{\partial \log x_1}{\partial u} + 2kk'^2\frac{\partial \log x_1}{\partial k} = 0$$

oder auch:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + 2\left(\frac{\partial \log w}{\partial u} + k^2 u\right)\frac{\partial x_1}{\partial u} + 2kk'^2\frac{\partial x_1}{\partial k} = 0.$$

Unter solchen Umständen können wir die Differentialgleichung für V schreiben:

$$8)\quad \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (n^2-1)\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\frac{\partial V}{\partial x_1} + 2n^2kk'^2\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2 sn^2 u\, V = 0,$$

oder auch:

$$9)\quad \left[1 - \left(k + \frac{1}{k}\right)x_1^2 + x_1^4\right]\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + (n^2-1)\left[\left(k + \frac{1}{k}\right)x_1 - 2x_1^3\right]\frac{\partial V}{\partial x_1}$$
$$+ 2n^2k'^2\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)x_1^2 V = 0.$$

Es ist dieses die gesuchte Differentialgleichung. Sie kann vereinfacht werden, indem man die Hülfsgrösse einführt:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Die Form derselben wird dann:

$$10)\quad (1 - 2\alpha x_1^2 + x_1^4)\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + 2(n^2-1)(\alpha x_1 - x_1^3)\frac{\partial V}{\partial x_1} + 4n^2(1-\alpha^2)\frac{\partial V}{\partial \alpha}$$
$$+ n^2(n^2-1)x_1^2 V = 0.$$

Wir haben x_1 als unabhängige Veränderliche eingeführt. Ebenso hätte man die Grössen:

$$y_1 = \frac{w_2}{w} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, cn u,$$

$$z_1 = \frac{w_3}{w} = \sqrt{\frac{1}{k'}}\, dn u$$

einführen können. Es ergeben sich dann analoge Differentialgleichungen, die kaum näher aufgestellt zu werden brauchen.

Es ist die soeben entwickelte Differentialgleichung zuerst von Jacobi aufgestellt worden. Die Anwendung zur Berechnung der Multiplicationsformeln ist eine einfache. Beschränken wir uns zunächst auf die Function V, so ist dieselbe für ein beliebiges n gleichbedeutend mit der Function $A(x^2)$, oder also:

$$V = \sum P_m \,.\, x^{2m}.$$

Setzen wir:

$$P_m = k^m p_m,$$

so folgt:

$$V = \sum p_m\, x_1^{2m}.$$

Da nun sich unmittelbar die Gleichung ergiebt:

$$p_m(k) = p_m\left(\frac{1}{k}\right),$$

so folgt, dass $p_m(k)$ eine ganze rationale Function von α ist, deren Grad die Zahl m nicht übersteigt. Setzen wir diesen Werth von V in die Differentialgleichung ein, so ergiebt sich durch Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x_1 die Relation:

$$\text{11)}\quad (2m+1)(2m+2)p_{m+1} + 4m(n^2-2m)\alpha p_m + 4n^2(1-\alpha^2)\frac{dp_m}{d\alpha} + (n^2-2m+1)(n^2-2m+2)p_{m-1} = 0.$$

Es ist dieses eine Beziehung zwischen drei auf einander folgenden Grössen p.

Aus ihr ergeben sich die einfachsten Werthe, wenn wir hinzunehmen, dass $p_0 = 1$ ist:

$$p_1 = 0,$$

$$p_2 = -\frac{n^2(n^2-1)}{3\,.\,4},$$

$$p_3 = \frac{2n^2(n^2-1)(n^2-4)\alpha}{3\,.\,5\,.\,6},$$

. . . .

So wird z. B. für den Fall $n = 5$:

$$V = 1 - 50x_1^4 + 280\alpha x_1^6 - 5(25 + 128\alpha^2)x_1^8 + 32(23\alpha + 16\alpha^3)x_1^{10} - 20(15 + 48\alpha^2)x_1^{12}$$
$$+ 720\alpha x_1^{14} - 105x_1^{16} - 160\alpha x_1^{18} + (62 + 64\alpha^2)x_1^{20} - 40\alpha x_1^{22} + 5x_1^{24},$$

für $n = 6$:

$$V = 1 - x_1^{36} - 105x_1^4(1 - x_1^{28}) + 896\alpha x_1^6(1 - x_1^{24}) - 12(37 + 288\alpha^2)x_1^8(1 - x_1^{20})$$
$$+ 1536(3\alpha + 4\alpha^3)x_1^{10}(1 - x_1^{16}) + 4(621 + 3360\alpha^2 + 1024\alpha^4)x_1^{12}(1 - x_1^{12})$$
$$+ 384(33\alpha + 32\alpha^3)x_1^{14}(1 - x_1^8) + 126(15 + 128\alpha^2)x_1^{16}(1 - x_1^4).$$

Haben wir in dieser Weise für V das Problem gelöst, so haben wir es im Falle eines ungeraden n zu gleicher Zeit für die übrigen Grössen V_1, V_2, V_3 gelöst, da diese nach angegebenen Regeln aus V entstehen. Im Falle eines geraden n ist freilich eine solche Reduction nicht möglich. In demselben muss mit den Functionen V_1, V_2, V_3 verfahren werden wie mit V.

§ 56.

Die Multiplication der Theta- und elliptischen Functionen. Bestimmung der Coefficienten mit Hülfe von Theilwerthen.

Wir wollen das Multiplicationsproblem jetzt in der folgenden Weise lösen.

Nehmen wir an, dass n eine ungerade Zahl sei, so fanden wir für $\vartheta_1(nv)$ die Form:

$$\vartheta_1(nv) = \vartheta_1(v) F^{\frac{n^2-1}{2}} [\vartheta_0^2(v), \vartheta_1^2(v)],$$

wo die Function F eine ganze homogene Function $\frac{n^2-1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet.

Wir können auch schreiben:

$$\frac{Al_1(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = sn\,u \,.\, B(sn^2 u),$$

wo B eine ganze rationale Function von $sn^2 u$ vom Grade $\frac{n^2-1}{2}$ bedeutet. Eine solche ist bis auf eine Constante bestimmt, wenn man ihre Nullwerthe kennt. Diese sind zu gleicher Zeit die Nullwerthe von:

$$Al_1(nu).$$

Nun wird aber $Al_1(nu)$ dann und nur dann Null, wenn:

$$nu = 2mK + 2m_1 i K'$$

ist, wobei m und m_1 ganze Zahlen bedeuten. Geben wir m und m_1 alle Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{n-1}{2}$, so erhalten wir im Ganzen n^2 von einander verschiedene Werthe. Für die entsprechenden Werthe:

$$u = \frac{2mK + 2m_1 iK'}{n}$$

werden aber die Werthe von snu alle von einander verschieden sein. Wir erhalten demgemäss auf diese Weise alle Wurzeln der Gleichung:

$$snu\,B(sn^2u) = 0.$$

Wir können dieselben, wenn wir von $m = 0, m_1 = 0$ absehen, so theilen:

$$m = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}, \quad m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{n-1}{2},$$

$$m = 0, \qquad m_1 = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2},$$

und die entsprechenden negativen. Da sn^2u für $\pm u$ denselben Werth annimmt, so können wir unter solchen Umständen schreiben:

$$1) \qquad \frac{Al_1(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = c.snu \prod \left(1 - \frac{sn^2u}{sn^2\alpha}\right),$$

wenn wir unter α die vorhin hingeschriebenen Werthe:

$$\frac{2mK + 2m_1 iK'}{n}$$

verstehen und das Product über die angegebenen Combinationen erstrecken. Die Constante ergiebt sich unmittelbar, wenn wir $u = 0$ setzen. Wir erhalten schliesslich die Formel:

$$2) \qquad \frac{Al_1(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = n\,snu \prod \left(1 - \frac{sn^2u}{sn^2\alpha}\right).$$

In genau so einfacher Weise sind die übrigen Theta- resp. Al-Functionen zu behandeln. Es ergeben sich die Formeln:

$$3) \qquad \frac{Al_0(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = \prod (1 - k^2 sn^2\alpha . sn^2u),$$

$$4) \qquad \frac{Al_2(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = cnu \prod \left(1 - \frac{dn^2\alpha}{cn^2\alpha} sn^2u\right),$$

$$5) \qquad \frac{Al_3(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = dnu \prod \left(1 - k^2 \frac{cn^2\alpha}{dn^2\alpha} sn^2u\right).$$

Im Falle eines geraden n modificiren sich die Resultate.

In demselben wird:

$$\frac{Al_1(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = snu.cnu.dnu\,B(sn^2u),$$

wobei $B(sn^2u)$ eine ganze rationale Function von sn^2u vom Grade $n^2 - 4$ ist. Es handelt sich wieder darum, die sämmtlichen Nullwerthe derselben zu bestimmen. Offenbar haben dieselben wiederum die Form:

$$u = \frac{2mK + 2m_1 iK'}{n},$$

wo nun aber m und m_1 die folgenden Werthe anzunehmen haben:

$$m = 0, \quad m_1 = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \left(\frac{n}{2} - 1\right), \quad m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

$$m = \frac{n}{2}, \quad m_1 = 1, 2, \ldots \frac{n}{2} - 1,$$

$$m = -\frac{n}{2}, \quad m_1 = -1, -2, \ldots -\left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

$$m = 1, 2, \ldots \frac{n}{2} - 1; \quad m_1 = \frac{n}{2},$$

$$m = -1, -2, \ldots -\left(\frac{n}{2} - 1\right); \quad m_1 = -\frac{n}{2}.$$

Wir theilen dieselben wieder in zwei Gruppen. In die eine nehmen wir die Werthepaare:

$$m = 0, \frac{n}{2}; \quad m_1 = 1, 2, \ldots \frac{n}{2} - 1,$$

$$m = 1, 2, \ldots \frac{n}{2} - 1; \quad m_1 = 0, \pm 1, \ldots \pm \left(\frac{n}{2} - 1\right), \frac{n}{2},$$

dann erhält die andere die entsprechenden negativen Werthe.

Verstehen wir nun unter α_1 die Grösse:

$$\alpha_1 = \frac{2mK + 2m_1 iK'}{n},$$

wobei m und m_1 beliebige Paare aus der ersten Gruppe bedeuten, so folgt die Formel:

$$6) \qquad \frac{Al_1(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = n\,sn\,u\,.\,cn\,u\,.\,dn\,u \prod \left(1 - \frac{sn^2 u}{sn^2 \alpha_1}\right).$$

Genau so einfach ergeben sich die Resultate:

$$7) \qquad \frac{Al_0(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = \prod \left(1 - \frac{sn^2 u}{sn^2 \alpha_2}\right),$$

wobei α_2 die Form hat:

$$\alpha_2 = \frac{2mK + (2m_1 + 1) iK'}{n}$$

und $2m$ und $2m_1 + 1$ die Werthe annehmen:

$$2m : 0, n; \quad 2m_1 + 1 : 1, 3, \ldots n - 1;$$

$$2m : 2, 4, \ldots n - 2 \cdot \quad 2m_1 + 1 : \pm 1, \pm 3, \ldots \pm (n - 1).$$

Drittens wird:

$$8)\qquad \frac{Al_2(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = \prod\left(1 - \frac{sn^2 u}{sn^2 \alpha_3}\right),$$

wobei α_3 ist:

$$\alpha_3 = \frac{(2m+1)K + 2m_1 iK'}{n}$$

und $2m+1$ und $2m_1$ die folgenden Werthe annehmen:

$$2m+1: 1, 3, 5, \ldots n-1; \quad 2m_1: 0, n,$$

$$2m+1: 1, 3, \ldots n-1; \quad 2m_1: \pm 2, \pm 4, \ldots \pm (n-2).$$

Endlich viertens wird:

$$9)\qquad \frac{Al_3(nu)}{Al_0(u)^{n^2}} = \prod\left(1 - \frac{sn^2 u}{sn^2 \alpha_4}\right),$$

wobei α_4 ist:

$$\alpha_4 = \frac{(2m+1)K + (2m_1+1)iK'}{n}$$

und $2m+1$ und $2m_1+1$ die folgenden Werthe annehmen:

$$2m+1: 1, 3, \ldots n-1; \quad 2m_1+1: \pm 1, \pm 3, \ldots \pm (n-1).$$

Aus den soeben entwickelten Formeln können eine grosse Reihe weiterer wichtiger Relationen abgeleitet werden. Wir deuten die Art derselben nur an. Nehmen wir an, dass n eine ungerade Zahl ist, so folgt aus unseren Formeln:

$$\prod(1 - k^2 sn^2 u \,.\, sn^2\alpha)\, sn\, nu = n\, sn\, u \prod\left(1 - \frac{sn^2 u}{sn^2 \alpha}\right).$$

Durch Substitution halber Perioden folgt hieraus:

$$\prod\left(1 - \frac{sn^2\alpha}{sn^2 u}\right)\frac{1}{sn\, nu} = \frac{n}{sn\, u}\prod\left(1 - \frac{1}{k^2 sn^2 u \,.\, sn^2\alpha}\right).$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar die Constantenrelation:

$$10)\qquad n^2 = k^{2\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}\prod sn^4\alpha.$$

Setzen wir andererseits:

$$x = sn\, u,$$

so erhalten wir die Gleichung:

$$11)\qquad \prod(1 - k^2 sn^2\alpha\, x^2)\, sn\, nu - nx\prod\left(1 - \frac{x^2}{sn^2\alpha}\right) = 0.$$

Bei gegebenem $sn\, nu$ können wir diese Gleichung als eine algebraische Gleichung mit der Unbekannten x ansehen. Die Wurzeln derselben sind leicht zu bestimmen, wenn man erwägt, dass $sn\, nu$ ungeändert bleibt, wenn an Stelle von u gesetzt wird:

$$u + \frac{4mK + 4m_1 iK'}{n}.$$

Dieselben ergeben sich unter der Form:

$$x = sn\left(u + \frac{4mK + 4m_1 iK'}{n}\right),$$

wobei m und m_1 alle Werthe von 0 bis $n-1$ annehmen können. Wir können daher unsere Gleichung auch schreiben:

$$12)\qquad \prod\left[x - sn\left(u + \frac{4mK + 4m_1 iK'}{n}\right)\right] = 0.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x ergeben sich eine Reihe von Relationen, unter denen wir die einfachste und wichtigste herausgreifen:

$$13)\qquad n\,sn\,nu = \sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_{m_1} sn\left(u + \frac{4mK + 4m_1 iK'}{n}\right).$$

Genau so einfach ergeben sich die beiden Relationen:

$$14)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\,cn\,nu = \sum\sum cn\left(u + \frac{4mK + 4m_1 iK'}{n}\right),$$

$$15)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\,dn\,nu = \sum\sum dn\left(u + \frac{4mK + 4m_1 iK'}{n}\right).$$

Von der Aufstellung weiterer Relationen möge abgesehen werden.

§ 57.

Die Multiplication der Theta- und elliptischen Functionen. Vierte Methode.

Bei den bisherigen Methoden haben wir $\vartheta_\alpha(nv)$ aufgefasst als Thetafunction von der Ordnung n^2 und sie nach gegebenen Regeln durch die ursprünglichen Thetafunctionen dargestellt. Die Coefficienten sind dann auf doppeltem Wege hergestellt worden. Wir können aber ganz allgemein so vorgehen, dass wir auf irgend eine Weise eine Thetafunction von der Ordnungszahl n^2 bilden, die dieselben Nullwerthe wie $\vartheta_\alpha(nv)$ besitzt. Eine solche kann sich dann von $\vartheta_\alpha(nv)$ nur um eine Constante unterscheiden.

Nehmen wir nun an, dass n eine ungerade Zahl sei und bilden das Product:

$$\prod \vartheta_1\left(v + \frac{m + m_1\tau}{n}\right),$$

wobei m und m_1 die Zahlwerthe annehmen können:

$$0, \pm 1, \ldots \pm \frac{n-1}{2},$$

so ist dasselbe eine Thetafunction von der Ordnungszahl n^2, die dieselbe Charakteristik und dieselben Nullwerthe besitzt wie $\vartheta_1(nv)$.

Hieraus folgt:

$$1)\qquad \vartheta_1(nv) = c\prod \vartheta_1\left(v + \frac{m + m_1\tau}{n}\right).$$

Die Constante ist durch Specialisirung von v leicht zu bestimmen. Der Ausdruck für dieselbe nimmt zunächst eine etwas complicirte Gestalt an, erwägen wir aber die Beziehung:

$$\vartheta_1' = 2\pi q^{\frac{1}{4}}\prod_1^\infty (1 - q^{2\nu})^3$$

und nehmen die Productentwickelung der Thetafunctionen hinzu, so ergiebt sich nach einigen leichten Rechnungen der Werth:

$$\frac{1}{c} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod (1 - q^{2\nu})^{n^2-1}.$$

Damit haben wir eine dritte Darstellung von $\vartheta_1(nv)$ gefunden, aus welcher unmittelbar durch Substitution halber Perioden die Formeln gefunden werden können:

$$2)\qquad \begin{cases} \vartheta_0(nv) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} c\prod \vartheta_0\left(v + \frac{m + m_1\tau}{n}\right), \\ \vartheta_2(nv) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} c\prod \vartheta_2\left(v + \frac{m + m_1\tau}{n}\right), \\ \vartheta_3(nv) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} c\prod \vartheta_3\left(v + \frac{m + m_1\tau}{n}\right). \end{cases}$$

Aus den Formeln für die Thetafunctionen ergeben sich unmittelbar die entsprechenden für die elliptischen Functionen und zwar erhalten wir:

$$3)\qquad \begin{cases} sn\,nu = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n^2-1}{2}}\prod sn\left(u + \frac{2mK + 2m_1iK'}{n}\right), \\ cn\,nu = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{n^2-1}{2}}\prod cn\left(u + \frac{2mK + 2m_1iK'}{n}\right), \\ dn\,nu = \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{n^2-1}{2}}\prod dn\left(u + \frac{2mK + 2m_1iK'}{n}\right). \end{cases}$$

Diese letzten drei Formeln können dazu dienen, um einige der im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln auf anderem Wege abzuleiten und zwar indem man die Glieder paarweise in bestimmter Weise zusammenfasst — indessen kann von dieser Ableitung füglich abgesehen werden.

Diese Formeln können dazu dienen, um interessante Constantenrelationen abzuleiten. Wir erhalten u. a. die folgenden eleganten Formeln:

$$
4)\quad\begin{cases}
\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n}{k^{\frac{n^2-1}{2}}}=\prod sn^2\dfrac{2mK+2m_1iK'}{n},\\[2ex]
\left(\dfrac{k'}{k}\right)^{\frac{n^2-1}{2}}=\prod cn^2\dfrac{2mK+2m_1iK'}{n},\\[2ex]
k'^{\frac{n^2-1}{2}}=\prod dn^2\dfrac{2mK+2m_1iK'}{n}.
\end{cases}
$$

Hierbei ist das Product auf alle Werthe $m=0,1,2,\dots\frac{n-1}{2}$, $m'=0,\pm 1,\pm 2,\dots\pm\frac{n-1}{2}$ auszudehnen mit der Beschränkung, dass für $m=0$, m' nur die positiven Werthe $1,2,3,\dots\frac{n-1}{2}$ annehmen darf.

Für gerade Werthe von n sind ähnliche Formeln abzuleiten.

§ 58.

Die Multiplication der elliptischen Functionen. Methode von Kiepert.

Kiepert hat eine einfache Darstellung der Multiplication der elliptischen Functionen gegeben, die kurz in folgender Weise entwickelt werden möge. Setzt man:

$$
1)\qquad f(v)=\frac{\vartheta_0^2(v)}{\vartheta_1^2(v)}
$$

und bildet die Determinante:

$$
2)\qquad D=\begin{vmatrix}
1, f(v_1), f'(v_1),\dots f^{(n-2)}(v_1)\\
1, f(v_2), f'(v_2),\dots f^{(n-2)}(v_2)\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
1, f(v_n), f'(v_n),\dots f^{(n-2)}(v_n)
\end{vmatrix},
$$

wobei $v_1, v_2,\dots v_n$ vollkommen beliebige Argumente bedeuten, so ist das Product:

$$
D\prod_{\alpha=1}^{\alpha=n}\vartheta_1^n(v_\alpha)
$$

eine ganze transcendente Function der Grössen $v_1,\dots v_n$. Man überzeugt sich leicht, dass es in Bezug auf ein jedes v_α eine Thetafunction von der Ordnungszahl n ist, welche für die Werthe

$$
v_\alpha=v_1,\quad v_\alpha=v_2,\dots\quad v_\alpha=v_n
$$

verschwindet. Hieraus folgt mit leichter Mühe die Formel:

$$
3)\qquad D\prod\vartheta_1^n(v_\alpha)=c\,.\,\vartheta_1(v_1+\cdots v_n)\prod\vartheta_1(v_\alpha-v_\beta),
$$

in welcher c eine Constante bedeutet.

Von dieser Formel, die nach richtiger Bestimmung der Constanten zuerst von Hermite angegeben worden ist, kann man gemäss eines von Frobenius entwickelten Grenzüberganges zu der Kiepert'schen Multiplicationsformel gelangen.

Dazu setzen wir:

$$v_1 = v, \quad v_2 = v + h, \quad v_3 = v + 2h, \dots v_n = v + (n-1)h.$$

Bedient man sich der bekannten Bezeichnung:

$$\Delta f(v) = f(v+h) - f(v),$$

so wird D übergehen in den Ausdruck:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & f(v) \dots & f^{(n-2)}(v) \\ 0 & \Delta f(v) \dots & \Delta f^{(n-2)}(v) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & \Delta^{n-1} f(v) \dots & \Delta^{n-1} f^{(n-2)}(v) \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt:

$$c \cdot \frac{D_1}{\Pi[(\alpha-\beta)h]} = \frac{1}{\Pi(\alpha-\beta)} \begin{vmatrix} 1 & f(v) \dots & f^{(n-2)}(v) \\ 0 & \frac{\Delta f(v)}{h}, \dots & \frac{\Delta f^{(n-2)}(v)}{h} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{\Delta^{n-1} f(v)}{h^{n-1}} \dots & \frac{\Delta^{n-1} f^{(n-2)}(v)}{h^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir demnach $h = 0$, so wird:

$$c_1 \cdot \frac{\vartheta_1(nv)}{\vartheta_1^{n^2}(v)} = \begin{vmatrix} f'(v) \dots & f^{(n-1)}(v) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ f^{(n-1)}(v) \dots & f^{(2n-3)}(v) \end{vmatrix},$$

wobei c_1 jedenfalls eine Constante bedeutet. Dieselbe wird am einfachsten bestimmt, indem man links und rechts nach Potenzen von u entwickelt und die Coefficienten von u^{-n^2+1} vergleicht. Die Formel gestaltet sich besonders einfach, wenn wir die Function $Al_1(u)$ und die Function:

$$F(u) = \frac{1}{sn^2 u} \tag{4}$$

einführen. Dann erhalten wir die Kiepert'sche Formel

$$\frac{Al_1(nu)}{Al_1(u)^{n^2}} = \begin{vmatrix} F'(u)\,F''(u) \dots & F^{(n-1)}(u) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ F^{(n-1)}(u) \dots & F^{(2n-3)}(u) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

§ 59.[26])

Die Transformation n^{ten} Grades der Thetafunctionen. Erste Coefficientenbestimmung.

Nachdem wir in den letzten Paragraphen eine Reihe von Anwendungen der Transformation ersten und zweiten Grades auf verschiedene Probleme gebracht haben, wenden wir uns nunmehr zu der Theorie der allgemeinen Transformation zurück. Hierbei können wir, ohne der Allgemeinheit der Untersuchungen Abbruch zu thun, annehmen, dass der Grad n eine ungerade Primzahl ist, wir können uns ferner auf die repräsentirenden Transformationen von der Form beschränken:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

die wir auch in der einen Form zusammenfassen können:

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ r & t_1 \end{vmatrix}.$$

Es ist zunächst leicht nachzuweisen, dass wir berechtigt sind, hierbei anzunehmen, dass r ein Multiplum von 16 ist, also die Form 16ξ hat, während ξ ein vollständiges Restesystem nach dem Modul t_1 durchläuft, etwa die Werthe $0, 1, \dots t_1 - 1$.

In der That, wenden wir auf den Repräsentanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & n \end{vmatrix}$$

die lineare Transformation:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix}$$

an, worin m eine noch näher zu bestimmende ganze Zahl bedeutet, so erhalten wir für die aus diesen beiden zusammengesetzte Transformation die folgende:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r+mn & n \end{vmatrix}.$$

Nun lässt sich die Grösse m stets so bestimmen, dass:

$$r + mn$$

eine durch 16 theilbare Zahl wird, und zwar nur auf eine Weise so, dass dieselbe gleich 16ξ wird, wobei ξ einen der Werthe $0, 1, \dots n-1$ annimmt. Hieraus folgt ohne Weiteres die Richtigkeit der Behauptung.

Wir betrachten nun die Function:

$$\text{1)} \qquad \Pi_\lambda(v) = \vartheta_\lambda(v', \tau'),$$

wobei λ die Charakteristik $[g, h]$ bedeutet und v', τ' die bekannten Werthe

besitzen, wobei aber von vornherein nur Repräsentanten zu Grunde gelegt werden.

Dann ist:

$$2)\qquad \begin{cases} \Pi_\lambda(v+1) = (-1)^g \Pi_\lambda(v), \\ \Pi_\lambda(v+\tau) = (-1)^h e^{-n\pi i(2v+\tau)} \Pi_\lambda(v), \end{cases}$$

ferner ist die transformirte Function zugleich mit der ursprünglichen gerade oder ungerade. Hieraus folgt, dass die transformirten Functionen Thetafunctionen n^{ter} Ordnung mit derselben Charakteristik wie die ursprünglichen sind. Dieselben können nach angegebenen Regeln durch die ursprünglichen ausgedrückt werden. Die einzige Schwierigkeit, die hierbei zu überwinden ist, besteht in der Bestimmung der Constanten, welche in den fertigen Formeln auftreten. Wir wollen zunächst auf dem folgenden Wege vorgehen. Jedenfalls können wir den Ansatz machen:

$$3)\qquad \begin{cases} \vartheta_0(v',\tau') = c_1\vartheta_0^n(v) + c_2\vartheta_0^{n-2}(v)\,\vartheta_1^2(v) + \cdots c_{\frac{n+1}{2}}\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_1^{n-1}(v), \\ \vartheta_2(v',\tau') = c_1\vartheta_2^n(v) + c_2\vartheta_2^{n-2}(v)\,\vartheta_3^2(v) + \cdots c_{\frac{n+1}{2}}\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3^{n-1}(v), \\ \vartheta_3(v',\tau') = c_1\vartheta_3^n(v) + c_2\vartheta_3^{n-2}(v)\,\vartheta_2^2(v) + \cdots c_{\frac{n+1}{2}}\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_2^{n-1}(v), \\ (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v',\tau') = c_1\vartheta_1^n(v) + c_2\vartheta_1^{n-2}(v)\,\vartheta_0^2(v) + \cdots c_{\frac{n+1}{2}}\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_0^{n-1}(v). \end{cases}$$

Setzen wir:

$$\theta_\alpha = \vartheta_\alpha(0,\tau'), \quad k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \quad c = \frac{\theta_2^2}{\theta_3^2},$$
$$u' = \pi\theta_3^2 v' = \pi t\theta_3^2 v = t\frac{\theta_3^2}{\vartheta_3^2}u = Mu,$$

so können wir unsere Gleichungen folgendermassen schreiben:

$$4)\qquad \begin{cases} \vartheta_3^n\cdot\dfrac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^n(v)} = c_1\vartheta_3^n + c_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2 sn^2(u,k) + \cdots c_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3.\vartheta_2^{n-1}sn^{n-1}(u,k), \\ \dfrac{\theta_2\vartheta_0^n}{\theta_0}cn(u',c)\dfrac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^n(v)} = c_1\vartheta_2^n cn^n(u,k) + \cdots c_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2.\vartheta_3^{n-1}cn(u,k)dn^{n-1}(u,k), \\ \dfrac{\theta_3\vartheta_0^n}{\theta_0}dn(u',c)\dfrac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^n(v)} = c_1\vartheta_3^n dn^n(u,k) + \cdots c_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3.\vartheta_2^{n-1}dn(u,k)cn^{n-1}(u,k), \\ (-1)^{\frac{t-1}{2}}\dfrac{\theta_2\vartheta_3^n}{\theta_3}sn(u',c)\dfrac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^n(v)} = c_1\vartheta_2^n sn^n(u,k) + \cdots c_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2.\vartheta_3^{n-1}sn(u,k). \end{cases}$$

Wir denken uns in diesen Gleichungen die elliptischen Functionen $sn(u,k)$, $cn(u,k)$, $dn(u,k)$ sowie ihre Producte nach Potenzen von u entwickelt. Die Coefficienten sind dann ganze rationale Functionen von k^2 oder, was für unseren Zweck ausreicht, rationale Functionen von ϑ_α.

Ebenso denken wir uns die Functionen:

$$sn(u', c), \quad cn(u', c), \quad dn(u', c)$$

nach Potenzen von u' entwickelt. Die Coefficienten sind rationale Functionen von θ_α. Da nun die Beziehung besteht:

$$u' = \frac{t.\theta_3^2}{\vartheta_3^2} u,$$

so können wir die Entwickelung auch nach Potenzen von u fortschreitend auffassen — die Coefficienten sind dann rationale Functionen der Grössen ϑ_α und θ_α. Endlich können wir setzen:

$$\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v)} = d_0 + d_2 u^2 + d_4 u^4 + \cdots$$

Auch hier kann die Form der Coefficienten näher präcisirt werden. Es ist:

$$\vartheta_0(v) = e^{-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}} F,$$

$$\vartheta_0(v', \tau') = e^{-\frac{\theta_0''}{\theta_0}\frac{v'^2}{2}} F_1,$$

wobei F und F_1 ganze transcendente Functionen von u resp. u' darstellen, deren Coefficienten sich ganz und rational durch k^2 resp. c^2 darstellen lassen. Hieraus folgt:

$$\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v)} = e^{-\frac{v^2}{2}\left(t^2\frac{\theta_0''}{\theta_0} - n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)} . G,$$

wobei G eine Potenzreihe von u bedeutet, deren Coefficienten sich rational aus den Grössen ϑ_α und θ_α zusammensetzen lassen.

Wir können aber auch von diesem Resultate absehen und die Grössen $d_2, d_4, d_6, \ldots$ sämmtlich als Unbekannte ansehen, ohne dass die Schlüsse, auf welche es bei unseren Untersuchungen ankommt, an Allgemeinheit verlieren.

In der That, denken wir uns unsere Entwickelungen in das Gleichungssystem eingesetzt und die Coefficienten von $u^0, u^1, \ldots u^{2r+1}$ links und rechts einander gleich gesetzt, so erhalten wir $4r$ lineare Gleichungen mit den

$$\frac{n+1}{2} + r$$

Unbekannten:

$$c_1, c_2, \ldots c_{\frac{n+1}{2}}, \quad d_2, d_4, \ldots d_{2r}.$$

Wächst daher r, so können wir die sämmtlichen unbekannten Grössen auf mannigfache Weise als rationale Functionen der Grössen

ϑ_α und θ_α ausdrücken und erhalten überdies zwischen diesen Grössen unendlich viele Beziehungen, mit anderen Worten, wir erhalten den

Lehrsatz: Alle Constanten, welche bei der Transformation n^{ten} Grades auftreten, lassen sich rational durch die Grössen ϑ_α und θ_α ausdrücken. Zwischen diesen Grössen selbst bestehen unendlich viele Beziehungen.

Die Zahl der Thetarelationen, die wir auf diesem Wege erhalten, lässt sich durch die folgenden Bemerkungen vermehren. Erstens kann die lineare Transformation angewandt werden. In der That, sind:

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ \xi & t_1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} t' & 0 \\ \xi' & t_1' \end{vmatrix}$$

zwei beliebige Repräsentanten, so lassen sich immer zwei lineare Transformationen:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_0' & a_1' \\ b_0' & b_1' \end{vmatrix}$$

derart bestimmen, dass:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t & 0 \\ \xi & t_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t' & 0 \\ \xi' & t_1' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0' & a_1' \\ b_0' & b_1' \end{vmatrix}$$

ist. Die Richtigkeit dieses Satzes zeigt eine einfache Rechnung.

Unter solchen Umständen können die Sätze der linearen Transformation unmittelbar auf die Gleichungen angewandt werden, welche zwischen den ursprünglichen und den transformirten Thetafunctionen bestehen und zur Vermehrung derselben dienen.

Zweitens zeigt sich die folgende Bemerkung von Bedeutung. Wir fanden, dass zu jeder Transformation:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

eine andere von der Form gehört:

$$\begin{vmatrix} b_1 & -a_1 \\ -b_0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Es ist dieses die zu der ursprünglichen supplementäre Transformation. Die Aufeinanderfolge beider Substitutionen führt zur Multiplication. Dieser Umstand macht dieselbe zur Auffindung von Thetarelationen besonders geeignet.

§ 60.

Die Transformation dritten Grades.

Wir wollen einige Anwendungen der allgemeinen Gesetze bringen und zunächst den Fall

$$n = 3$$

näher ins Auge fassen.

Für denselben wird:

$$1)\quad \begin{cases} \vartheta_3^3 \cdot \dfrac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^3(v)} = c_1 \vartheta_3^3 + c_2 \vartheta_3 \cdot \vartheta_2^2 sn^2(u, k), \\ \dfrac{\theta_2 \vartheta_0^3}{\theta_0} cn(u', c) \dfrac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^3(v)} = c_1 \vartheta_2^3 cn^3(u, k) + c_2 \vartheta_2 \vartheta_3^2 cn(u, k) dn^2(u, k), \\ \dfrac{\theta_3 \vartheta_0^3}{\theta_0} dn(u', c) \dfrac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^3(v)} = c_1 \vartheta_3^3 dn^3(u, k) + c_2 \vartheta_3 \vartheta_2^2 dn(u, k) cn^2(u, k), \\ (-1)^{\frac{t-1}{2}} \dfrac{\theta_2 \vartheta_3^3}{\theta_3} sn(u', c) \dfrac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^3(v)} = c_1 \vartheta_2^3 sn^3(u, k) + c_2 \vartheta_2 \cdot \vartheta_3^2 sn(u, k). \end{cases}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen:

$$u = u' = 0,$$

so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$2)\qquad d_0 = c_1,$$

$$3)\qquad d_0 \vartheta_0^3 \theta_2 = c_1 \vartheta_2^3 \theta_0 + c_2 \vartheta_2 \vartheta_3^2 \theta_0,$$

$$4)\qquad d_0 \vartheta_0^3 \theta_3 = c_1 \vartheta_3^3 \theta_0 + c_2 \vartheta_2^2 \vartheta_3 \theta_0.$$

Differenziren wir einmal und setzen dann:

$$u = u' = 0,$$

so ergiebt sich:

$$5)\qquad (-1)^{\frac{t-1}{2}} d_0 \cdot t \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 = c_2 \vartheta_2 \cdot \vartheta_3.$$

Durch zweimaliges Differenziren erhalten wir:

$$6)\qquad d_2 \vartheta_3^2 = c_2 \vartheta_2^2,$$

$$7)\quad t^2 d_0 \vartheta_0^3 \theta_2 \cdot \theta_3^4 - 2 d_2 \vartheta_0^3 \vartheta_3^4 \theta_2 = 3 c_1 \vartheta_2^3 \vartheta_3^4 \theta_0 + c_2 \vartheta_2 \cdot \vartheta_3^2 \theta_0 (2 \vartheta_2^4 + \vartheta_3^4),$$

$$8)\quad t^2 d_0 \vartheta_0^3 \theta_2^4 \theta_3 - 2 d_2 \vartheta_0^3 \vartheta_3^4 \theta_3 = 3 c_1 \vartheta_2^4 \vartheta_3^3 \theta_0 + c_2 \vartheta_2^2 \vartheta_3 \theta_0 (\vartheta_2^4 + 2 \vartheta_3^4).$$

In dieser Weise können wir beliebig weit fortgehen, indessen wollen wir hierbei stehen bleiben.

Durch eine einfache Verknüpfung der aufgestellten Gleichungen erhalten wir neben der Bestimmung der beiden Constanten c_1 und c_2 eine grosse Anzahl einfacher Thetarelationen.

Zunächst ergiebt sich aus den drei ersten Gleichungen die wichtige Relation:

$$9)\qquad \vartheta_3\theta_3 = \vartheta_0\theta_0 + \vartheta_2\theta_2,$$

dann aber folgen ähnlich einfach die folgenden:

$$10)\qquad \frac{\vartheta_0^3}{\theta_0} - \frac{\vartheta_2^3}{\theta_2} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t.\vartheta_3.\theta_3,$$

$$11)\qquad t^2\theta_3^4 - \vartheta_3^4 = 2\frac{\vartheta_0.\vartheta_2}{\theta_0.\theta_2}(\vartheta_2^2\theta_0^2 + \vartheta_0^2\theta_2^2),$$

$$12)\qquad t^2\theta_3^4 + \vartheta_3^4 = 2\vartheta_3.\theta_3\left(\frac{\vartheta_0^3}{\theta_0} + \frac{\vartheta_2^3}{\theta_2}\right),$$

$$13)\qquad t^2\theta_3^4 - \vartheta_3^4 = 2\vartheta_2\vartheta_3\frac{\theta_3}{\theta_2}\left((-1)^{\frac{t-1}{2}} t\theta_2^2 + \vartheta_2^2\right).$$

Von diesen Gleichungen repräsentirt eine jede ein System von drei Gleichungen, von denen die beiden anderen durch lineare Transformation aus ihnen entstanden sind. So kann z. B. das System, welches zu der zweiten Gleichung gehört, geschrieben werden:

$$14)\qquad \begin{cases} t^2.\theta_3^4 - \vartheta_3^4 = 2\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\theta_0\theta_2}(\vartheta_2^2.\theta_0^2 + \vartheta_0^2\theta_2^2), \\ t^2.\theta_2^4 - \vartheta_2^4 = 2\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{\theta_0\theta_3}(\vartheta_0^2\,\theta_3^2 - \vartheta_3^2\theta_0^2), \\ t^2.\theta_0^4 - \vartheta_0^4 = 2\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\theta_2\theta_3}(\vartheta_2^2\,\theta_3^2 - \vartheta_3^2\theta_2^2). \end{cases}$$

Aus diesem System ergiebt sich ohne Mühe ein weiteres:

$$15)\qquad t^2\theta_3^4 - 3\vartheta_3^4 = 2(-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_3\theta_3(\vartheta_2\theta_2 - \vartheta_0\theta_0).$$

Aehnlich einfach wird:

$$16)\quad (\vartheta_3^2\theta_2^2 - \vartheta_2^2\theta_3^2)(\vartheta_0^2\theta_3^2 - \vartheta_3^2\theta_0^2) = 2\vartheta_0\vartheta_2\theta_0\theta_2(\vartheta_2^2\theta_0^2 + \vartheta_0^2\theta_2^2).$$

Durch Multiplication der rechten und linken Seiten je zweier der drei Gleichungen, welche durch die letzte Gleichung dargestellt werden, erhalten wir ferner:

$$17)\qquad \vartheta_3^2\theta_0^2 - \vartheta_0^2\theta_3^2 = 2\vartheta_2\theta_2\sqrt{\vartheta_0.\vartheta_3.\theta_0.\theta_3}.$$

Ergänzen wir die linken Seiten der durch die Relation:

$$t^2.\theta_3^4 + \vartheta_3^4 = 2\vartheta_3.\theta_3\left(\frac{\vartheta_0^3}{\theta_0} + \frac{\vartheta_2^3}{\theta_2}\right)$$

dargestellten Gleichungen zu Quadraten, so erhalten wir ein Gleichungssystem, welches wir in der Form darstellen können:

$$18)\ (t\theta_2^2 \pm \vartheta_2^2)^2 = 2\vartheta_2\theta_2\left[\frac{\vartheta_0^3}{\theta_0}\left(1 \pm (-1)^{\frac{t-1}{2}}\right) + \frac{\vartheta_3^3}{\theta_3}\left(1 \mp (-1)^{\frac{t-1}{2}}\right)\right].$$

Diese Relationen nehmen eine besonders einfache Gestalt an, wenn wir einen der Repräsentanten herausgreifen, z. B. $t = 3$ setzen. Dann folgt:

$$[3\vartheta_2^2(0, 3\tau) - \vartheta_2^2]^2 = 4\vartheta_2 . \vartheta_2(0, 3\tau)\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0(0, 3\tau)},$$

$$[3\vartheta_2^2(0, 3\tau) + \vartheta_2^2]^2 = 4\vartheta_2 . \vartheta_2(0, 3\tau)\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_3(0, 3\tau)}.$$

So können wir weitergehen, indessen mögen die aufgestellten Formeln genügen.

Bei der Anwendung der supplementären Transformation fassen wir uns kürzer. Dieselbe ergiebt die Gleichungen:

$$19)\left\{\begin{aligned}
\theta_2^2 . \frac{\vartheta_0(3v, \tau)}{\vartheta_0^3(v', \tau')} &= c_1'\theta_3^3 + c_2'\theta_3\theta_2^2 sn^2(u', c),\\
\frac{\vartheta_2 . \theta_0^3}{\vartheta_0} cn(3u, k)\frac{\vartheta_0(3v, \tau)}{\vartheta_0^3(v', \tau')} &= c_1'\theta_2^3 cn^3(u', c) + c_2' . \theta_2 . \theta_3^2 cn(u', c)\, dn^2(u', c),\\
\frac{\vartheta_3 . \theta_0^3}{\vartheta_0} dn(3u, k)\frac{\vartheta_0(3v, \tau)}{\vartheta_0^3(v', \tau')} &= c_1'\theta_3^3 dn^3(u', c) + c_2'\theta_3 . \theta_2^2 dn(u', c)\, cn^2(u', c),\\
(-1)^{\frac{t_1-1}{2}}\frac{\vartheta_2 . \theta_3^3}{\vartheta_3} sn(3u, k)\frac{\vartheta_0(3v, \tau)}{\vartheta_0^3(v', \tau')} &= c_1'\theta_2^3 sn^3(u', c) + c_2'\theta_2 . \theta_3^2 sn(u', c).
\end{aligned}\right.$$

Setzen wir in diesen Formeln $u = u' = 0$ und nehmen die Entwickelung an:

$$\frac{\vartheta_0(3v, \tau)}{\vartheta_0^3(v', \tau')} = d_0' + d_2' u^2 + \cdots$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$20)\qquad d_0' = c_1' = \frac{\vartheta_0}{\theta_0^3},$$

$$21)\qquad d_0'\theta_0^3\vartheta_2 = c_1'\theta_2^3\vartheta_0 + c_2'\theta_2\theta_3^2\vartheta_0,$$

$$22)\qquad d_0'\theta_0^3\vartheta_3 = c_1'\theta_3^3\vartheta_0 + c_2'\theta_3\theta_2^2\vartheta_0.$$

Differenziren wir einmal und setzen dann $u = 0$, so wird:

$$23)\qquad (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} t_1 . \vartheta_2 . \vartheta_3 . d_0' = c_2' . \theta_2 . \theta_3.$$

Weitere Coefficientenvergleichungen mögen nicht vorgenommen werden. Aus den aufgestellten Gleichungen ergiebt sich die Relation:

$$24)\qquad \frac{\theta_0^3}{\vartheta_0} - \frac{\theta_2^3}{\vartheta_2} = (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} t_1\vartheta_3 . \theta_3$$

und die beiden mit ihr durch lineare Transformation zusammenhängenden.

Die Verknüpfung dieser Gleichung mit einer früheren ergiebt dann:

$$25)\qquad \left(\frac{\theta_0^3}{\vartheta_0} - \frac{\theta_2^3}{\vartheta_2}\right)\left(\frac{\vartheta_2^3}{\theta_2} - \frac{\vartheta_0^3}{\theta_0}\right) = 3\vartheta_3^2\theta_3^2.$$

Hiermit wollen wir mit den Thetarelationen abbrechen und nur noch die folgende Bemerkung machen. Die Relation:

$$\vartheta_3 \,.\, \theta_3 = \vartheta_0 \theta_0 + \vartheta_2 \theta_2$$

ist homogen in Bezug auf ϑ_α und θ_α. Führen wir die beiden Moduln ein, so ergiebt sich nach Fortschaffen der Wurzeln die Gleichung:

$$26) \quad (k^2 - c^2)^4 = 128 k^2 c^2 (1 - k^2)(1 - c^2)(2 - c^2 - k^2 + 2k^2c^2),$$

die sich schon in den Fundamenten findet.

§ 61.

Die Transformation fünften Grades.

Für den Fall $n = 5$ nehmen die Transformationsgleichungen die folgende Form an:

$$1) \left\{ \begin{aligned} \vartheta_3{}^5 \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} &= c_1 \vartheta_3{}^5 + c_2 \vartheta_3{}^3 . \vartheta_2{}^2 sn^2(u, k) + c_3 \vartheta_3 \vartheta_2{}^4 sn^4(u, k), \\ \frac{\theta_2 \vartheta_0{}^5}{\theta_0} cn(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} &= c_1 \vartheta_2{}^5 cn^5(u, k) + c_2 \vartheta_2{}^3 \vartheta_3{}^2 cn^3(u, k) dn^2(u, k) \\ &\quad + c_3 \vartheta_2 \vartheta_3{}^4 cn(u, k) dn^4(u, k), \\ \frac{\theta_3 \vartheta_0{}^5}{\theta_0} dn(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} &= c_1 \vartheta_3{}^5 dn^5(u, k) + c_2 \vartheta_3{}^3 \vartheta_2{}^2 dn^3(u, k) cn^2(u, k) \\ &\quad + c_3 \vartheta_3 \vartheta_2{}^4 dn(u, k) cn^4(u, k), \\ \frac{\theta_2 \vartheta_3{}^5}{\theta_3} sn(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} &= c_1 \vartheta_2{}^5 sn^5(u, k) + c_2 \vartheta_2{}^3 \vartheta_3{}^2 sn^3(u, k) + c_3 \vartheta_2 \vartheta_3{}^4 sn(u, k). \end{aligned} \right.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $u = u' = 0$, so erhalten wir die drei Gleichungen:

$$2) \qquad d_0 = c_1,$$

$$3) \qquad \vartheta_0{}^5 . \theta_2 . d_0 = c_1 \vartheta_2{}^5 . \theta_0 + c_2 \vartheta_2{}^3 \vartheta_3{}^2 \theta_0 + c_3 \vartheta_2 \vartheta_3{}^4 \theta_0,$$

$$4) \qquad \vartheta_0{}^5 \theta_3 d_0 = c_1 \vartheta_3{}^5 \theta_0 + c_2 \vartheta_2{}^2 \vartheta_3{}^3 \theta_0 + c_3 \vartheta_2{}^4 \vartheta_3 \theta_0.$$

Differenziren wir einmal und setzen nach der Differentiation $u = u' = 0$, so ergiebt sich die Gleichung:

$$5) \qquad t \theta_2 . \theta_3 d_0 = \vartheta_2 \vartheta_3 c_3,$$

differenziren wir zweimal, so ergiebt sich nach dem Nullsetzen der Argumente:

$$6) \qquad \vartheta_3{}^2 d_2 = \vartheta_2{}^2 c_2,$$

$$\begin{aligned} 7) \quad t^2 \vartheta_0{}^5 \theta_2 . \theta_3{}^4 d_0 - 2 d_2 \vartheta_0{}^5 \vartheta_3{}^4 \theta_2 &= 5 c_1 \vartheta_2{}^5 \vartheta_3{}^4 \theta_0 + c_2 \vartheta_2{}^3 \vartheta_3{}^2 \theta_0 (2 \vartheta_2{}^4 + 3 \vartheta_3{}^4) \\ &\quad + c_3 \vartheta_2 \vartheta_3{}^4 \theta_0 (4 \vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad t^2 \vartheta_0{}^5 \theta_2{}^4 \theta_3 d_0 - 2 d_2 \vartheta_0{}^5 \vartheta_3{}^4 \theta_3 &= 5 c_1 \vartheta_2{}^4 \vartheta_3{}^5 \theta_0 + c_2 \vartheta_2{}^2 \vartheta_3{}^3 \theta_0 (3 \vartheta_2{}^4 + 2 \vartheta_3{}^4) \\ &\quad + c_3 \vartheta_3{}^4 \vartheta_2 \theta_0 (\vartheta_2{}^4 + 4 \vartheta_3{}^4). \end{aligned}$$

Bei diesen Gleichungen wollen wir stehen bleiben. Sie geben erstens eine Bestimmung der Transformationsconstanten und zweitens eine Anzahl von Thetarelationen.

Die Constanten sind unmittelbar bestimmt, so dass wir uns auf die Aufstellung von Thetarelationen beschränken können.

Die vier ersten Gleichungen ergeben durch Elimination von c_1, c_2, c_3 die Gleichung:

$$9)\qquad \vartheta_0\vartheta_3\theta_2 - \vartheta_0\vartheta_2\theta_3 + \vartheta_2\vartheta_3\theta_0 = t\,\theta_0\theta_2\theta_3,$$

die wir auch in die Form bringen können:

$$9a)\qquad \frac{\vartheta_0\vartheta_3}{\theta_0\theta_3} + \frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\theta_2\theta_3} - \frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\theta_0\theta_2} = t$$

oder

$$9b)\qquad \frac{\theta_0}{\vartheta_0} + \frac{\theta_2}{\vartheta_2} - \frac{\theta_3}{\vartheta_3} = t\,\frac{\theta_0\theta_2\theta_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}.$$

Unter Hinzunahme der anderen Gleichungen erhalten wir die Relation:

$$10)\qquad t^2\theta_3^4 - 3\vartheta_3^4 = 2\,\frac{\vartheta_0^5\theta_2}{\vartheta_2\theta_0} + 2\,\frac{\vartheta_2^5\theta_0}{\vartheta_0\theta_2} - 2t\,\vartheta_3^3\theta_3\left(\frac{\theta_2}{\vartheta_2} + \frac{\theta_0}{\vartheta_0}\right),$$

sowie zwei ähnliche, die aus ihr durch lineare Transformation abgeleitet werden können.

Ferner ergiebt sich:

$$11)\quad t^2\theta_3^4 + \vartheta_3^4 = 2\vartheta_3^3\theta_3\left(\frac{\vartheta_0}{\theta_0} + \frac{\vartheta_2}{\theta_2}\right) - 2\,\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\theta_0\theta_2}\,(\vartheta_0^2\theta_0^2 + \vartheta_2^2\theta_2^2)$$

nebst zwei ähnlichen Gleichungen.

Die vorletzten Gleichungen lassen sich durch einfache Operationen in die Form bringen:

$$12)\quad \begin{cases} (\vartheta_0\theta_3 - \vartheta_3\theta_0)^2(\vartheta_2\theta_3 - \vartheta_3\theta_2)^2 = 2\vartheta_0\vartheta_2\theta_0\theta_2(\vartheta_3^2.\theta_3^2 - \vartheta_0^2.\theta_0^2 - \vartheta_2^2.\theta_2^2), \\ (\vartheta_2\theta_3 - \vartheta_3\theta_2)^2(\vartheta_0\theta_2 + \vartheta_2\theta_0)^2 = 2\vartheta_0\vartheta_3\theta_0\theta_3(\vartheta_3^2.\theta_3^2 - \vartheta_0^2.\theta_0^2 - \vartheta_2^2.\theta_2^2), \\ (\vartheta_0\theta_3 - \vartheta_3\theta_0)^2(\vartheta_0\theta_2 + \vartheta_2\theta_0)^2 = 2\vartheta_2\vartheta_3\theta_2\theta_3(\vartheta_3^2.\theta_3^2 - \vartheta_0^2.\theta_0^2 - \vartheta_2^2.\theta_2^2). \end{cases}$$

Hieraus folgen unmittelbar durch Division je zweier Gleichungen die Formeln:

$$13)\qquad \begin{cases} \vartheta_3\theta_3(\vartheta_0\theta_3 - \vartheta_3\theta_0)^2 = \vartheta_2\theta_2(\vartheta_0\theta_2 + \vartheta_2\theta_0)^2, \\ \vartheta_3\theta_3(\vartheta_2\theta_3 - \vartheta_3\theta_2)^2 = \vartheta_0\theta_0(\vartheta_0\theta_2 + \vartheta_2\theta_0)^2, \\ \vartheta_2\theta_2(\vartheta_2\theta_3 - \vartheta_3\theta_2)^2 = \vartheta_0\theta_0(\vartheta_0\theta_3 - \vartheta_3\theta_0)^2. \end{cases}$$

Ferner erhält man aus einem der früheren Gleichungssysteme, indem man die linken Seiten zu Quadraten ergänzt:

$$14)\qquad (\vartheta_3^2 - t\,\theta_3^2)^2 = 2\,\frac{\vartheta_0.\vartheta_2}{\theta_0.\theta_2}\,(\vartheta_3^2\theta_3^2 - \vartheta_0^2\theta_0^2 - \vartheta_2^2\,\theta_2^2),$$

und ebenso zwei ähnliche Gleichungen.

Ferner kann auch hier die supplementäre Transformation zur Ableitung neuer Formeln dienen. Wir begnügen uns damit, das entsprechende Gleichungssystem aufzustellen und die einfachsten Relationen aus demselben abzuleiten.

Das Gleichungssystem lautet:

$$15)\quad \begin{cases} \theta_3{}^5\,\dfrac{\vartheta_0(nv,\tau)}{\vartheta_0{}^5(v',\tau')} = c_1'\theta_3{}^5 + c_2'\theta_3{}^3\theta_2{}^2 sn^2(u',c) + c_3'\theta_3\,.\,\theta_2{}^4 sn^4(u',c), \\ \dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\theta_0{}^5\, cn(nu)\,\dfrac{\vartheta_0(nv,\tau)}{\vartheta_0{}^5(v',\tau')} = c_1'\theta_2{}^5 cn^5(u',c) + c_2'\theta_2{}^3\theta_3{}^2 cn^3(u',c)\,dn^2(u',c) \\ \qquad\qquad + c_3'\theta_2\,.\,\theta_3{}^4 cn(u',c)\,dn^4(u',c), \\ \dfrac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\theta_0{}^5 dn(nu)\,\dfrac{\vartheta_0(nv,\tau)}{\vartheta_0{}^5(v',\tau')} = c_1'\theta_3{}^5 dn^5(u',c) + c_2'\theta_3{}^3\theta_2{}^2 dn^3(u',c)\,cn^2(u',c) \\ \qquad\qquad + c_3'\theta_3\theta_2{}^4 dn(u',c)\,cn^4(u',c), \\ \dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\theta_3{}^5\, sn(nu)\,\dfrac{\vartheta_0(nv,\tau)}{\vartheta_0{}^5(v',\tau')} = c_1'\theta_2{}^5 sn^5(u',c) + c_2'\theta_2{}^3\theta_3{}^2 sn^3(u',c) + c_3'\theta_2\,.\,\theta_3{}^4 sn(u',c). \end{cases}$$

Durch Nullsetzen der Argumente erhalten wir:

$$16)\qquad d_0' = c_1',$$

$$17)\qquad \theta_0{}^5\vartheta_2 d_0' = c_1'\theta_2{}^5\vartheta_0 + c_2'\theta_2{}^3\theta_3{}^2\vartheta_0 + c_3'\theta_3{}^4\theta_2\vartheta_0,$$

$$18)\qquad \theta_0{}^5\vartheta_3 d_0' = c_1'\theta_3{}^5\vartheta_0 + c_2'\theta_2{}^2\theta_3{}^3\vartheta_0 + c_3'\theta_3\theta_2{}^4\vartheta_0.$$

Durch Differentiation ergiebt sich die Gleichung:

$$19)\qquad t_1\vartheta_2\vartheta_3 d_0' = \theta_2\theta_3 c_3'.$$

Aus diesen vier Gleichungen erhalten wir die Relation:

$$20)\qquad \theta_0\theta_3\vartheta_2 - \theta_0\theta_2\vartheta_3 + \theta_2\theta_3\vartheta_0 = t_1\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3.$$

Hiermit wollen wir abbrechen.

§ 62.[27])

Die Transformation der Thetafunctionen. Zweite und dritte Methode mit Hülfe von Theilwerthen.

Wir wollen jetzt in etwas anderer Weise verfahren. Jedenfalls können wir setzen:

$$\vartheta_1(v',\tau') = \vartheta_1(v)\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}^{\alpha} c_\alpha\,.\,\vartheta_1^{2\alpha}(v).\vartheta_0^{n-2\alpha-1}(v).$$

Nun wird $\vartheta_1(v',\tau')$ gleich Null für alle Werthe:

$$v = \frac{\nu\varepsilon}{n},$$

wenn $\varepsilon = 1$ ist für $t = n$ und $\varepsilon = \tau - 16\xi$ ist für $t = 1$ und ν eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Hieraus folgt, dass für alle diese Werthe auch die rechte Seite verschwinden muss und damit erhalten wir ohne alle Mühe die Gleichung — wobei n ungerade vorausgesetzt ist:

$$1)\quad C.\vartheta_1(v',\tau') = \vartheta_1(v)\prod_{1,\frac{n-1}{2}}^{\nu}\left[\vartheta_1^2(v).\vartheta_0^2\left(\frac{\nu\varepsilon}{n}\right) - \vartheta_0^2(v)\vartheta_1^2\left(\frac{\nu\varepsilon}{n}\right)\right].$$

Durch Substitution halber Perioden erhalten wir aus dieser Formel unmittelbar die entsprechende für die anderen Thetafunctionen. In der That, vermehren wir v um $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m_1\tau$, so wird v' vermehrt um:

$$\frac{1}{2}mt + \frac{1}{2}m_1t_1\tau'.$$

Hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung und wir erhalten die Formeln:

$$2)\quad\begin{cases}(-1)^{\frac{t-1}{2}}C.\vartheta_0(v',\tau') = \vartheta_0(v)\prod\left[\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2\left(\frac{\nu\varepsilon}{n}\right) - \vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2\left(\frac{\nu\varepsilon}{n}\right)\right],\\ (-1)^{\frac{t-1}{2}}C\vartheta_2(v',\tau') = \vartheta_2(v)\prod\left[\vartheta_2^2(v)\vartheta_0^2\left(\frac{\nu\varepsilon}{n}\right) - \vartheta_3^2(v)\vartheta_1^2\left(\frac{\nu\varepsilon}{n}\right)\right],\\ (-1)^{\frac{t-1}{2}}C\vartheta_3(v',\tau') = \vartheta_3(v)\prod\left[\vartheta_3^2(v)\vartheta_0^2\left(\frac{\nu\varepsilon}{n}\right) - \vartheta_2^2(v)\vartheta_1^2\left(\frac{\nu\varepsilon}{n}\right)\right].\end{cases}$$

In diesen Formeln bedeutet C eine und dieselbe Constante. Es ist dieses die zweite Darstellung der transformirten Thetafunctionen. Wir können aus ihr unmittelbar eine dritte ableiten.

In der That, es ist allgemein:

$$\vartheta_0^2\vartheta_1(v+w)\vartheta_1(v-w) = \vartheta_1^2(v)\vartheta_0^2(w) - \vartheta_0^2(v)\vartheta_1^2(w).$$

Setzen wir daher:

$$w = \frac{\nu\varepsilon}{n},$$

so können wir die folgende Formel hinschreiben:

$$3)\qquad C_1.\vartheta_1(v',\tau') = \vartheta_1(v)\prod\vartheta_1\left(v+\frac{\nu\varepsilon}{n}\right)\vartheta_1\left(v-\frac{\nu\varepsilon}{n}\right),$$

wo C_1 in leichtangebbarer Weise mit C zusammenhängt. Aus derselben folgen dann die Darstellungen:

$$4)\quad\begin{cases}(-1)^{\frac{t-1}{2}}C_1.\vartheta_0(v',\tau') = \vartheta_0(v)\prod\vartheta_0\left(v+\frac{\nu\varepsilon}{n}\right)\vartheta_0\left(v-\frac{\nu\varepsilon}{n}\right),\\ (-1)^{\frac{t-1}{2}}C_1.\vartheta_2(v',\tau') = \vartheta_2(v)\prod\vartheta_2\left(v+\frac{\nu\varepsilon}{n}\right)\vartheta_2\left(v-\frac{\nu\varepsilon}{n}\right),\\ (-1)^{\frac{t-1}{2}}C_1.\vartheta_3(v',\tau') = \vartheta_3(v)\prod\vartheta_3\left(v+\frac{\nu\varepsilon}{n}\right)\vartheta_3\left(v-\frac{\nu\varepsilon}{n}\right).\end{cases}$$

Es ist dieses die dritte Darstellung der transformirten Thetafunctionen. Auch in ihr tritt eine unbekannte Constante C_1 auf, welche

mit C in bekannter Weise zusammenhängt. Wir wollen versuchen, den Werth derselben zu bestimmen. Wir müssen dazu einen Hülfssatz entwickeln.

Bekanntlich ist:

$$2\vartheta_3(v, 2\tau)\vartheta_2(v, 2\tau) = \vartheta_2\vartheta_2(v),$$
$$\vartheta_0(0, 2\tau)\vartheta_0(2v, 2\tau) = \vartheta_3(v)\vartheta_0(v).$$

Durch Multipliziren der rechten und linken Seiten erhalten wir:

$$2\vartheta_0(0, 2\tau)\vartheta_0(2v, 2\tau)\vartheta_3(v, 2\tau)\vartheta_2(v, 2\tau) = \vartheta_2 . \vartheta_0(v)\vartheta_3(v)\vartheta_2(v).$$

Ferner besteht die Gleichung:

$$2\vartheta_3(0, 2\tau)\vartheta_2(0, 2\tau)\vartheta_0^2(0, 2\tau) = \vartheta_2^2 . \vartheta_3^2 . \vartheta_0^2,$$

mithin ergiebt sich durch Division:

$$\frac{\vartheta_3(v, 2\tau)\vartheta_2(v, 2\tau)\vartheta_0(2v, 2\tau)}{\vartheta_3(0, 2\tau)\vartheta_2(0, 2\tau)\vartheta_0(0, 2\tau)} = \frac{\vartheta_3(v)\vartheta_2(v)\vartheta_0(v)}{\vartheta_3 . \vartheta_2 . \vartheta_0}.$$

Wenn nun n eine ungerade Zahl bedeutet, so ist:

$$\prod \vartheta_0\left(\frac{\nu}{n}\right) = \prod \vartheta_0\left(\frac{2\nu}{n}\right),$$

wobei in beiden Fällen das Product nach ν zu nehmen ist von $\nu = 1$ bis $\nu = n - 1$.

Hieraus folgt dann unmittelbar, dass der Ausdruck:

$$\frac{\prod \vartheta_3\left(\frac{\nu}{n}\right)\vartheta_2\left(\frac{\nu}{n}\right)\vartheta_0\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\vartheta_3^{n-1}\vartheta_2^{n-1}\vartheta_0^{n-1}}$$

ungeändert bleibt, wenn τ durch 2τ ersetzt wird — wobei das Product genau so zu nehmen ist, wie vorhin. Die hierbei vorkommenden Werthe von ν lassen sich in Paare anordnen:

$$2\nu, \quad n - 2\nu,$$

wobei ν jetzt die Werthe annimmt:

$$1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}.$$

Da nun die Beziehungen stattfinden:

$$\vartheta_3\left(\frac{2\nu}{n}\right) = \vartheta_3\left(\frac{n-2\nu}{n}\right), \quad \vartheta_2\left(\frac{2\nu}{n}\right) = -\vartheta_2\left(\frac{n-2\nu}{n}\right), \quad \vartheta_0\left(\frac{2\nu}{n}\right) = \vartheta_0\left(\frac{n-2\nu}{n}\right),$$

so stimmt der zuletzt betrachtete Ausdruck bis auf das Vorzeichen überein mit dem Quadrat von:

$$\frac{\prod \vartheta_3\left(\frac{2\nu}{n}\right)\vartheta_2\left(\frac{2\nu}{n}\right)\vartheta_0\left(\frac{2\nu}{n}\right)}{\vartheta_3^{\frac{n-1}{2}} . \vartheta_2^{\frac{n-1}{2}} . \vartheta_0^{\frac{n-1}{2}}},$$

wobei das Product nach ν zu nehmen ist von 1 bis $\frac{n-1}{2}$. Daraus folgt leicht, dass auch dieser Quotient ungeändert bleibt, wenn τ durch $2\tau, 4\tau, 8\tau$ etc. ersetzt wird. In Folge dessen kann man den Werth dieses Ausdrucks dadurch bestimmen, dass man τ über alle Grenzen wachsen lässt, so zwar, dass $q=0$ wird.

Für $q=0$ ist aber:

$$\vartheta_3(v)=1, \quad \vartheta_0(v)=1, \quad \vartheta_2(v)=\vartheta_2 . \cos\pi v.$$

Daraus folgt als Werth unseres Ausdruckes:

$$\prod \cos\frac{2\nu\pi}{n},$$

wobei das Product nach ν von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ auszudehnen ist. Der Werth dieses Productes ist aber bekannt, und zwar gleich:

$$\frac{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}}{2^{\frac{n-1}{2}}}$$

oder auch gleich:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

wenn die in der Theorie der quadratischen Reste gebräuchliche Bezeichnung gebraucht wird. Wir erhalten somit die Formel:

$$5) \quad 2^{\frac{n-1}{2}}\prod \vartheta_3\left(\frac{2\nu}{n}\right)\vartheta_2\left(\frac{2\nu}{n}\right)\vartheta_0\left(\frac{2\nu}{n}\right)=\left(\frac{2}{n}\right)\vartheta_3^{\frac{n-1}{2}}.\vartheta_2^{\frac{n-1}{2}}.\vartheta_0^{\frac{n-1}{2}}.$$

Nach dieser Hülfsbetrachtung kehren wir zu der Betrachtung und zur Bestimmung von C_1 zurück und zwar soll dieselbe für den Repräsentanten:

$$\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

vorgenommen werden. In diesem Falle ist $\varepsilon=1$ zu setzen und unser Gleichungssystem erhält die Form:

$$6) \begin{cases} C_1\vartheta_1(nv, n\tau)=\vartheta_1(v)\prod\vartheta_1\left(v+\frac{\nu}{n}\right)\vartheta_1\left(v-\frac{\nu}{n}\right), \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}C_1\vartheta_2(nv, n\tau)=\vartheta_2(v)\prod\vartheta_2\left(v+\frac{\nu}{n}\right)\vartheta_2\left(v-\frac{\nu}{n}\right), \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}C_1\vartheta_3(nv, n\tau)=\vartheta_3(v)\prod\vartheta_3\left(v+\frac{\nu}{n}\right)\vartheta_3\left(v-\frac{\nu}{n}\right), \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}C_1\vartheta_0(nv, n\tau)=\vartheta_0(v)\prod\vartheta_0\left(v+\frac{\nu}{n}\right)\vartheta_0\left(v-\frac{\nu}{n}\right). \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich unter Hinzunahme der Formel:

$$\vartheta_1' = \pi\vartheta_0 . \vartheta_2 . \vartheta_3$$

die Beziehung:

$$C_1^2 \prod_{1, \frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(\frac{\nu}{n}\right)^2 = n \prod_{1, \frac{n-1}{2}} \vartheta_3^2\left(\frac{\nu}{n}\right) \vartheta_2^2\left(\frac{\nu}{n}\right) \vartheta_0^2\left(\frac{\nu}{n}\right)$$

oder auch:

$$C_1^2 \prod_{1, n-1} \vartheta_1\left(\frac{\nu}{n}\right) = n \prod_{1, n-1} \vartheta_3\left(\frac{\nu}{n}\right) \vartheta_2\left(\frac{\nu}{n}\right) \vartheta_0\left(\frac{\nu}{n}\right),$$

$$C_1^2 \prod_{1, n-1} \vartheta_1\left(\frac{2\nu}{n}\right) = n \prod_{1, n-1} \vartheta_3\left(\frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_2\left(\frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_0\left(\frac{2\nu}{n}\right)$$

oder also:

$$C_1 \prod_{1, \frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(\frac{2\nu}{n}\right) = \sqrt{n} \prod_{1, \frac{n-1}{2}} \vartheta_3\left(\frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_2\left(\frac{2\nu}{n}\right) \vartheta_0\left(\frac{2\nu}{n}\right).$$

Das Vorzeichen bestimmt sich dadurch — wie aus einer der früheren Gleichungen, etwa aus der Gleichung für $\vartheta_3(n v, n\tau)$ folgt, indem man $q = 0$ setzt und hinzunimmt, dass dann

$$C_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

wird. Nehmen wir nunmehr unsere Hülfsformel hinzu, so folgt:

$$C_1 2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1, \frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(\frac{2\nu}{n}\right) = \sqrt{n}\, \vartheta_3^{\frac{n-1}{2}} . \vartheta_2^{\frac{n-1}{2}} . \vartheta_0^{\frac{n-1}{2}} .$$

Damit sind wir in diesem Falle zum Ziele gelangt. Für die übrigen Repräsentanten kann in analoger Weise verfahren werden. Wir können um so eher davon absehen, das näher auszuführen, als durch geeignete lineare Transformationen aus dem einen Repräsentanten die andern abgeleitet werden können.

§ 63.

Die Transformation der elliptischen Functionen. Bestimmung der Coefficienten mit Hülfe von Theilwerthen.

Indem wir die transformirten Thetafunctionen durch einander dividiren, erhalten wir die transformirten elliptischen Functionen, und zwar werden sich ebenso viele verschiedene Formen ergeben wie bei den Thetafunctionen. Es würde sich demgemäss zunächst eine Darstellung darbieten, bei welcher die Coefficienten sich rational durch die ursprünglichen und die transformirten Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente darstellen lassen. Da die hierbei auftretenden

Gesetze ziemlich complicirter Natur sind, so wollen wir von dieser Methode zunächst absehen und sofort die zweite Methode nehmen, bei welcher von den Theilwerthen Gebrauch gemacht wird.

Dividiren wir die hierbei gefundenen Ausdrücke für

$$\vartheta_2(v', \tau') \quad \text{und} \quad \vartheta_3(v', \tau')$$

durcheinander und setzen $v = v' = 0$, so erhalten wir das Resultat:

$$1) \qquad \sqrt{c} = \sqrt{k} \prod_{1, \frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_2^2\left(\frac{\nu \varepsilon}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\nu \varepsilon}{n}\right)},$$

oder wenn wir die elliptischen Functionen einführen und das Argument, welches dem Argument ε der Thetafunctionen entspricht, durch ω bezeichnen:

$$2) \qquad \sqrt{c} = (\sqrt{k})^n \prod_{1, \frac{n-1}{2}} \frac{cn^2\left(\frac{\nu \omega}{n}\right)}{dn^2\left(\frac{\nu \omega}{n}\right)}.$$

Genau so einfach ergiebt sich:

$$3) \qquad \sqrt{c'} = \sqrt{k'} \prod_{1, \frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{\nu \varepsilon}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\nu \varepsilon}{n}\right)}$$

oder auch:

$$4) \qquad \sqrt{c'} = (\sqrt{k'})^n \frac{1}{\prod dn^2\left(\frac{\nu \omega}{n}\right)}.$$

Vermöge dieser Formeln sind die transformirten Grössen $\sqrt{c}$ und $\sqrt{c'}$ zu bestimmen, wenn die entsprechenden ursprünglichen Grössen und die elliptischen Functionen für die Theilwerthe von Perioden bekannt sind. Nunmehr können die fertigen Transformationsformeln hergestellt werden. Durch Division von $\vartheta_1(v', \tau')$ durch $\vartheta_0(v', \tau')$ erhalten wir das Resultat:

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}} \sqrt{c}\, sn(u', c) = k^{\frac{n}{2}} sn(u, k) \prod_{1, \frac{n-1}{2}} \frac{sn^2(u, k) - sn^2\left(\frac{\nu \omega}{n}, k\right)}{1 - k^2 sn^2(u, k) sn^2\left(\frac{\nu \omega}{n}, k\right)},$$

oder mit Benutzung der vorhin gefundenen Formeln und bei einfacher Schreibweise:

$$
5)\quad \begin{cases}
sn(u', c) = (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} P_1 . P_2, \\
P_1 = \prod \dfrac{sn^2\left(\frac{\nu\omega}{n}\right) dn^2\left(\frac{\nu\omega}{n}\right)}{cn^2\left(\frac{\nu\omega}{n}\right)}, \\
P_2 = snu \prod \left(1 - \dfrac{sn^2 u}{sn^2 \frac{\nu\omega}{n}}\right) : \prod \left(1 - k^2 . sn^2 u . sn^2 \frac{\nu\omega}{n}\right).
\end{cases}
$$

Differenziren wir links und rechts nach u und setzen $u = u' = 0$, so ergiebt sich:

$$
6)\qquad M = t\frac{\theta_3^2}{\vartheta_3^2} = (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} \prod \frac{sn^2\frac{\nu\omega}{n} . dn^2\frac{\nu\omega}{n}}{cn^2\frac{\nu\omega}{n}},
$$

so dass auch der Multiplicator eine bekannte Grösse ist. Mit seiner Hülfe nimmt die Formel für die transformirte Sinusamplitude die Form an:

$$
7)\quad sn(Mu, c) = Msn(u) \prod \left(1 - \frac{sn^2 u}{sn^2 \frac{\nu\omega}{n}}\right) : \prod \left(1 - k^2 sn^2 u . sn^2 \frac{\nu\omega}{n}\right).
$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Die transformirte Sinusamplitude ist eine rationale Function der ursprünglichen, und zwar ist der Zähler eine ungerade Function vom Grade n, der Nenner eine gerade Function vom Grade $n-1$.

Analog lassen sich die beiden anderen Functionen berechnen.

Zunächst wird:

$$
8)\quad \begin{cases}
\sqrt{\dfrac{c}{c'}}\, cn(u', c) = \left(\dfrac{k}{k'}\right)^{\frac{n}{2}} P_1 . P_2, \\
P_1 = \prod cn^2\left(\frac{\nu\omega}{n}\right), \\
P_2 = cnu \prod \left(1 - \dfrac{sn^2 u}{sn^2 c \frac{\nu\omega}{n}}\right) : 1 - k^2 sn^2 u sn^2 \dfrac{\nu\omega}{n},
\end{cases}
$$

wobei der Abkürzung halber gesetzt ist:

$$
9)\qquad snc = \frac{cnu}{dnu}.
$$

Wir können die Formel auch folgendermassen schreiben:

$$10)\quad cn(Mu, c) = cn u \prod \left(1 - \frac{sn^2 u}{sn^2 c \frac{\nu\omega}{n}}\right) : 1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 \frac{\nu\omega}{n}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Die transformirte Cosinusamplitude lässt sich als Product der ursprünglichen Cosinusamplitude und einer rationalen Function der ursprünglichen Sinusamplitude darstellen. Zähler und Nenner sind gerade Functionen vom Grade $n-1$.

Drittens wird:

$$11)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{c}} dn(u', c) = \dfrac{1}{k'^{\frac{n}{2}}} P_1 . P_2, \\ P_1 = \prod dn^2 \dfrac{\nu\omega}{n}, \\ P_2 = dn u \prod \left(1 - k^2 sn^2 u . sn^2 c \dfrac{\nu\omega}{n}\right) : \left(1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 \dfrac{\nu\omega}{n}\right), \end{cases}$$

oder also nach einer früheren Formel:

$$12)\quad dn(u', c) = dn u \prod \left(1 - k^2 . sn^2 u . sn^2 c \frac{\nu\omega}{n}\right) : \left(1 - k^2 . sn^2 u . sn^2 \left(\frac{\nu\omega}{n}\right)\right).$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Die transformirte Deltaamplitude lässt sich als Product der ursprünglichen Deltaamplitude und einer rationalen Function der ursprünglichen Sinusamplitude darstellen. Zähler wie Nenner sind gerade Functionen vom Grade $n-1$.

Die soeben gegebene Darstellung der transformirten elliptischen Functionen kann zur Entwickelung einiger wichtiger Formeln benutzt werden.

Setzen wir:

$$k = sn u,$$

so kann die Formel, die wir für $sn(u', c)$ gefunden haben, in die Form gebracht werden:

$$x \prod \left(x^2 - sn^2 \frac{\nu\omega}{n}\right) - \frac{cM}{k} sn(u', c) \prod \left(x^2 - \frac{1}{k^2 sn^2 \frac{\nu\omega}{n}}\right) = 0.$$

Diese Gleichung kann als eine algebraische Gleichung mit der Unbekannten x vom Grade n angesehen werden. Ihre Wurzeln haben die Form:

$$sn\left(u+\frac{4\mu\omega}{n}\right), \qquad \mu:0,1,\ldots n-1$$

so dass wir die linke Seite auch schreiben können:

$$\prod\left[x - sn\left(u+\frac{4\mu\omega}{n}\right)\right]. \qquad \mu:0,1,\ldots n-1$$

Dann ergiebt sich aber durch Vergleichung der Coefficienten von x^{n-1} die Beziehung:

$$\text{13)} \qquad \frac{Mc}{k} sn(u',c) = \sum sn\left(u+\frac{4\mu\omega}{n}\right).$$

Ganz analog ergeben sich die Beziehungen:

$$\text{14)} \qquad (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} \frac{Mc}{k} cn(u',c) = \sum cn\left(u+\frac{4\mu\omega}{n}\right),$$

$$\text{15)} \qquad (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} M dn(u',c) = \sum dn\left(u+\frac{4\mu\omega}{n}\right),$$

wobei μ die Werthe annimmt:

$$0, 1, \ldots n-1.$$

Wir können die Formeln auch schreiben:

$$\text{16)} \begin{cases} \frac{Mc}{k} sn(u',c) = sn u + \sum sn\left(u+\frac{4\mu\omega}{n}\right) + sn\left(u-\frac{4\mu\omega}{n}\right), \\ (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} \frac{Mc}{k} cn(u',c) = cn u + \sum cn\left(u+\frac{4\mu\omega}{n}\right) + cn\left(u-\frac{4\mu\omega}{n}\right), \\ (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} M dn(u',c) = dn u + \sum dn\left(u+\frac{4\mu\omega}{n}\right) + dn\left(u-\frac{4\mu\omega}{n}\right), \end{cases}$$

wobei nun aber μ die Werthe annimmt:

$$0, 1, \ldots \frac{n-1}{2}.$$

Wir können diese Formeln auch als eine weitere Darstellung der transformirten elliptischen Functionen ansehen.

Die Vergleichung weiterer Coefficienten giebt Anlass zu weiteren Beziehungen, indessen möge von ihrer Aufstellung abgesehen werden.

Bei diesen Betrachtungen ist, wie nochmals hervorgehoben werden möge, n als ungerade Zahl angenommen.

§ 64.[28])

Definition und Haupteigenschaften der Modulfunctionen.

Wir haben im Vorangegangenen eine Reihe eindeutiger Functionen von τ kennen gelernt, wie die Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente, rationale Verbindungen derselben etc. Unter ihnen sind

solche, wie die Quotienten zweier Thetafunctionen, welche für gewisse lineare Transformationen ungeändert bleiben. Diese geben Anlass zu der folgenden Definition:

Eine Modulfunction ist eine solche eindeutige Function von τ, welche ungeändert bleibt, wenn τ entweder der Gesammtheit oder auch nur einem Theil der linearen Transformationen

$$S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

unterworfen wird, so dass, wenn $\psi(\tau)$ eine solche Function ist, die Relation stattfindet:

$$\psi\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right) = \psi(\tau).$$

Bleibt $\psi(\tau)$ durch zwei Substitutionen S und S_1 ungeändert, so bleibt es auch durch das Product derselben ungeändert. Wir wollen nun sagen, alle Substitutionen, welche $\psi(\tau)$ ungeändert lassen, bilden zusammen eine Gruppe. Wir schliessen uns damit dem Sprachgebrauche an. Ganz allgemein sagt man nämlich, eine Anzahl von Transformationen bildet eine Gruppe, wenn das Product je zweier derselben wieder unter ihnen enthalten ist.

Wenn nun eine solche Gruppe G alle Transformationen und nur diejenigen enthält, durch welche $\psi(\tau)$ ungeändert bleibt in dem Sinne, dass die Gleichung:

$$\psi(\tau) = \psi(\tau')$$

eine Gleichung:

$$\tau = \frac{\gamma + \delta\tau'}{\alpha + \beta\tau'}$$

nach sich zieht, so dass die Transformation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

in G enthalten ist, so sagen wir: $\psi(\tau)$ gehöre zur Gruppe G.

Es ist nicht schwer, einzelne solcher Modulfunctionen aufzustellen und die zugehörige Gruppe zu bestimmen. Nehmen wir zuerst die Grösse k^2, so bleibt dieselbe für alle diejenigen linearen Transformationen und nur für diejenigen ungeändert, bei welchen die Congruenzen stattfinden:

$$\alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1 \mod 2.$$

Dieselben bilden offenbar die Gruppe, zu welcher k^2 gehört. Alle Transformationen können aus zwei zusammengesetzt werden, die durch die Gleichungen charakterisirt sind:

$$\tau' = \tau + 2, \quad \tau' = \frac{\tau}{1 + 2\tau}.$$

Nehmen wir zweitens die Function:

$$k^2(1-k^2),$$

so bleibt diese erstens für alle vorhin definirten Transformationen ungeändert, zweitens aber auch für die Transformationen des zweiten Falles, für welche:

$$\alpha \equiv 0, \quad \beta \equiv 1, \quad \gamma \equiv 1, \quad \delta \equiv 0 \; mod\; 2$$

ist. Offenbar bilden auch diese eine Gruppe, und zwar können wir die Transformationen derselben zusammensetzen aus denjenigen, die den Gleichungen entsprechen:

$$\tau' = \tau + 2, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}.$$

Der Beweis folgt leicht. Erstens können wir alle Transformationen des ersten und zweiten Falles auf diesem Wege erhalten, ferner keine andern. Wir können also sagen $k^2(1-k^2)$ gehört zu der Gruppe von Transformationen, die sich aus den zu den Gleichungen:

$$\tau' = \tau + 2, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

gehörenden zusammensetzen.

Drittens ist es nicht schwer, eine Function herzustellen, welche für:

$$\tau' = \tau + 1 \quad \text{und} \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

d. h. für alle linearen Transformationen ungeändert bleibt.

In der That, jede ganze symmetrische Function der Grössen:

$$\vartheta_0^8, \vartheta_2^8, \vartheta_3^8$$

wird durch die Transformation:

$$\tau' = \tau + 1$$

nicht geändert, während sie für die Transformation:

$$\tau' = -\frac{1}{\tau}$$

in sich selbst multiplicirt mit einem leicht angebbaren Factor übergeht, der von der Ordnungszahl der Function abhängt. Der Quotient je zweier zu derselben Ordnungszahl gehörenden Functionen hat dann die verlangte Eigenschaft. Die einfachsten symmetrischen Ausdrücke nun, aus denen sich alle übrigen ganz und rational herleiten lassen, sind die folgenden:

$$\vartheta_0^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8,$$
$$\vartheta_2^8\vartheta_3^8 + \vartheta_3^8\vartheta_0^8 + \vartheta_0^8\vartheta_2^8,$$
$$\vartheta_0^8\vartheta_2^8\vartheta_3^8.$$

Bilden wir den Quotienten:

$$\frac{(\vartheta_0{}^8+\vartheta_2{}^8+\vartheta_3{}^8)^3}{\vartheta_0{}^8\vartheta_2{}^8\vartheta_3{}^8}=\frac{(k^4+k'^4+1)^3}{k^4.k'^4}=\frac{8(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2},$$

so haben wir eine Function der genannten Art gefunden. Wir bezeichnen sie mit $j(\tau)$ und nennen sie die Invariante.

Auf ähnlichem Wege können wir weiter fortgehen und noch eine unendliche Fülle weiterer Functionen bilden, sehen aber zunächst davon ab.

Wir haben bisher nur die Bedingung festgesetzt, dass die zu betrachtenden Functionen eindeutig von τ abhängen, wir wollen jetzt die weitere Bedingung hinzufügen und in Zukunft stets beibehalten, dass sie mit k^2 in einem algebraischen Zusammenhang stehen.

Für diese Modulfunctionen nun gilt der folgende fundamentale

Lehrsatz: Wenn $\psi(\tau)$ zur Gruppe G gehört und $\chi(\tau)$ durch die Transformationen von G ungeändert bleibt, so ist $\chi(\tau)$ rational durch $\psi(\tau)$ ausdrückbar.

Zunächst ist $\chi(\tau)$ eine algebraische Function von $\psi(\tau)$, und $\psi(\tau)$ kann als algebraische Function von k^2 jeden Werth annehmen. Zu jedem Werth von $\psi(\tau)$ gehört aber nach Voraussetzung nur ein Werth von $\chi(\tau)$ und daher ist $\chi(\tau)$ als einwerthige algebraische Function von $\psi(\tau)$ rational.

Specialisiren wir, so können wir z. B. die folgenden Sätze aussprechen:

Jede Modulfunction, welche durch die beiden Vertauschungen:

$$\tau'=\tau+2,\quad \tau'=-\frac{1}{\tau}$$

ungeändert bleibt, ist eine rationale Function von $k^2.k'^2$.

Ebenso folgt:

Jede Modulfunction, welche durch die beiden Transformationen:

$$\tau'=\tau+2,\quad \tau'=\frac{\tau}{1+2\tau}$$

ungeändert bleibt, ist eine rationale Function von k^2.

Jede Modulfunction, welche durch die beiden Vertauschungen:

$$\tau'=\tau+1,\quad \tau'=-\frac{1}{\tau}$$

ungeändert bleibt, ist eine rationale Function von $j(\tau)$.

Derartige Sätze können in grosser Fülle aufgestellt werden und es wird gerade Aufgabe der nächsten Paragraphen sein, mit Hülfe der Transformationstheorie neue Modulfunctionen aufzustellen.

§ 65.[29])

Einführung der Hermite'schen φ-, ψ- und χ-Functionen. Verwandlungstafeln derselben.

Um die in der Transformationstheorie aufgestellten Gleichungen zu entwickeln, ist es nothwendig, einige Functionen zu untersuchen, deren wichtigste Eigenschaften zuerst von Hermite aufgestellt worden sind. Nach Definition ist:

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}.$$

Führen wir die Productdarstellungen der Thetafunctionen ein, so können wir schreiben:

$$\sqrt{k} = 2q^{\frac{1}{4}}\left(\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right)^2,$$

$$\sqrt{k'} = \left(\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}\right)^2.$$

Diese Form legt den Gedanken nahe, an Stelle von $\sqrt{k}$ und $\sqrt{k'}$ die Functionen zu betrachten:

$$1) \qquad \varphi(\tau) = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\frac{(1+q^2)(1+q^4)\dots}{(1+q)(1+q^3)\dots},$$

$$2) \qquad \psi(\tau) = \frac{(1-q)(1-q^3)\dots}{(1+q)(1+q^3)\dots},$$

wobei $q^{\frac{1}{8}} = e^{\frac{\pi i \tau}{8}}$ gesetzt ist und für $\sqrt{2}$ der positive Werth zu nehmen ist. Die soeben definirten Functionen sind dann eindeutige Functionen von τ. Um unsere früheren Sätze auf dieselben anwenden zu können, d. h. mit ihrer Hülfe Modulfunctionen und algebraische Gleichungen zu finden, müssen wir die lineare Transformation der beiden Functionen ausführlicher betrachten. Hierbei ist die einzige auftauchende Schwierigkeit eine Vorzeichenbestimmung, da ja die lineare Transformation der beiden Functionen:

$$\varphi(\tau)^2 \quad \text{und} \quad \psi(\tau)^2$$

im Früheren durchgeführt worden ist. Wir wollen aber von den früheren Resultaten ganz absehen und die lineare Transformation nach dem Vorgange von Schläfli ganz unabhängig folgendermassen entwickeln.

Wir beschränken uns zunächst auf den ersten Fall der linearen Transformation:

$$a_0 \equiv b_1 \equiv 1 \bmod 2, \quad b_0 \equiv a_1 \equiv 0 \bmod 2$$

und nehmen überdies an, dass:

$$a_0 \equiv 1 \bmod 4$$

ist.

Dann folgt ähnlich wie früher, dass eine solche Transformation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

in die Form gebracht werden kann:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta_1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta_n \end{vmatrix},$$

wobei $\alpha_1, \dots \alpha_n$, $\beta_1, \dots \beta_n$ gerade Zahlen bedeuten, die positiv oder negativ sein können, von denen ferner entweder α_1 oder β_n oder beide der Null gleich sein können. Ein inneres Element gleich Null anzunehmen liegt keine Veranlassung vor, da:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

ist. Um einen möglichst einfachen Fall vor uns zu haben, wollen wir annehmen, dass n gleich 2 sei, also die Gleichung betrachten:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + \beta_1\alpha_2 \equiv 1 + \beta_1\alpha_2 \mod 16, \\ a_1 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2\alpha_2 \equiv \beta_1 + \beta_2 \mod 8, \\ b_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_1 \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2) \mod 16, \\ b_1 &= 1 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2. \end{aligned}$$

Genau so würde im allgemeinen Falle folgen:

$$3) \qquad \begin{cases} a_0 \equiv b_1 \equiv 1 \mod 4, \\ a_0 \equiv 1 + M \mod 16, \\ b_0 \equiv A + N \mod 16, \\ a_1 \equiv B \mod 8, \end{cases}$$

wenn wir setzen:

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n, \quad B = \beta_1 + \beta_2 + \cdots \beta_n, \\ A_1 &= \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n, \\ A_2 &= \alpha_3 + \cdots \alpha_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{n-1} &= \alpha_n, \\ M &= \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \cdots \beta_{n-1} A_{n-1}, \\ N &= A M - (\beta_1 A_1^2 + \beta_2 A_2^2 + \cdots \beta_{n-1} A_{n-1}^2). \end{aligned}$$

Es sind dann A und B durch 2, M durch 4, N durch 8 theilbar. Da unter solchen Umständen:

$$2AM \equiv 0 \; mod\, 16$$

ist, so folgt:

$$a_0 b_0 \equiv A + N + AM \; mod\, 16$$
$$\equiv A - (\beta_1 A_1^2 + \beta_2 A_2^2 + \cdots \beta_{n-1} A_{n-1}^2) \; mod\, 16.$$

Nun ist aber:

$$A_1(A_1 - 2) \equiv 0 \; mod\, 8,$$

also:

$$\beta_1 A_1^2 \equiv 2 A_1 \beta_1 \; mod\, 16 \text{ etc.},$$

also:

$$A - a_0 b_0 \equiv 2(A_1 \beta_1 + A_2 \beta_2 + \ldots) \equiv 2(a_0 - 1) \; mod\, 16.$$

Ferner ist nach Annahme:

$$a_0 \equiv 1 \; mod\, 4,$$

also:

$$2 \equiv a_0 + 1 \; mod\, 4,$$

$$2(a_0 - 1) \equiv (a_0 - 1)(a_0 + 1) \; mod\, 16$$

oder also:

4) $$A \equiv a_0 b_0 + a_0^2 - 1.$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht, wenn a_0, b_0, a_1, b_1 in $-a_0, -b_0, -a_1 - b_1$ verwandelt werden.

Genau so wird:

5) $$B \equiv a_0 a_1 + a_0^2 - 1 \; mod\, 16.$$

Hiermit ist die Hauptschwierigkeit überwunden.

In der That, in den einfachsten Fällen sind wir ohne Weiteres im Stande, die lineare Transformation auszuführen.

Nach Definition ist:

$$\varphi(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots},$$

$$\psi(\tau) = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}.$$

Hieraus folgt:

6) $$\varphi(\tau + 2) = e^{\frac{\pi i}{4}} \varphi(\tau).$$

Ferner folgt nach Früherem, dass jedenfalls sein muss:

7) $$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \pm\, \psi(\tau), \quad \psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \pm\, \varphi(\tau),$$

so dass also nur die Zeichenschwierigkeit zu heben übrig bleibt.

Setzen wir $\tau = i$, also $\tau = -\frac{1}{\tau}$, so wird:

$$\varphi(i) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{8}} \frac{(1+e^{-2\pi})(1+e^{-4\pi})\ldots}{(1+e^{-\pi})(1+e^{-3\pi})\ldots},$$

ferner:

$$\psi(i) = \frac{(1-e^{-\pi})(1-e^{-3\pi})\ldots}{(1+e^{-\pi})(1+e^{-3\pi})\ldots}$$

einen positiven Werth annehmen. Hieraus folgt, dass wir zu setzen haben:

$$8)\quad \left|\begin{array}{l} \varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau), \\ \psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \varphi(\tau). \end{array}\right.$$

Aus diesen und den früheren Gleichungen folgern wir:

$$9)\quad \left|\begin{array}{l} \varphi(\tau-\alpha) = e^{-\frac{\pi i \alpha}{8}} \varphi(\tau), \\ \varphi\left(\frac{\tau}{1-\beta\tau}\right) = \varphi(\tau). \end{array}\right.$$

Aus diesen Substitutionen, bei welchen α und β gerade Zahlen sind, können wir aber die allgemeinen Transformationen des ersten Falles zusammensetzen, denn es ist:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt, dass, wenn $a_0 \equiv 1 \; mod 4$, $b_1 \equiv 1 \; mod 2$, $b_0 \equiv a_1 \equiv 0 \; mod 2$ ist, dann allgemein die Relation stattfindet:

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = e^{-\frac{i\pi}{8}a_0 b_0 + \frac{a_0^2-1}{8} i\pi} \varphi(\tau).$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\left(\frac{2}{a_0}\right) = e^{\frac{a_0^2-1}{8} i\pi},$$

also erhalten wir das Resultat:

$$10)\quad \varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{-\frac{i\pi}{8}a_0 b_0} \varphi(\tau).$$

Da die Ausdrücke sich nicht ändern, wenn die vier Transformationszahlen mit entgegengesetzten Zeichen versehen werden, so fällt die Bedingung:

$$a_0 \equiv 1 \; mod \, 4$$

fort und es bleibt nur die Bedingung:

$$a_0 \equiv 1 \; mod \, 2.$$

Damit ist der erste Fall vollkommen erledigt. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die anderen entweder analog oder aber durch Anwendung specieller Transformationen aus dem soeben behandelten abgeleitet werden können. Wir begnügen uns damit, die Resultate anzugeben.

I. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \mod 2.$

$$\varphi(\tau') = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{-\frac{i\pi}{8} a_0 b_0} \varphi(\tau).$$

II. $a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \mod 2.$

$$\varphi(\tau') = \left(\frac{2}{b_0}\right) e^{\frac{i\pi}{8} a_0 b_0} \psi(\tau).$$

III. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \mod 2.$

$$\varphi(\tau') = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{i\pi}{8} a_0 b_0} \frac{1}{\varphi(\tau)}.$$

IV. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \mod 2.$

$$\varphi(\tau') = e^{\frac{i\pi}{8} a_0 b_0} \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}.$$

V. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \mod 2.$

$$\varphi(\tau') = e^{-\frac{i\pi}{8} a_0 b_0} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}.$$

VI. $a_0 \equiv 0, \quad a_0 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \mod 2.$

$$\varphi(\tau') = \left(\frac{2}{b_0}\right) e^{-\frac{i\pi}{8} a_0 b_0} \frac{1}{\psi(\tau)}.$$

In allen diesen Formeln ist gesetzt:

$$\tau' = \frac{b_0 - a_0 \tau}{a_1 \tau - b_1}.$$

Genau so einfach ist die $\psi(\tau)$-Function zu behandeln. Die entsprechenden Formeln können aus den obigen unmittelbar mit Hülfe der Beziehung:

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau)$$

hergeleitet werden. Sie lauten:

$$\text{I.}\quad \psi(\tau') = \left(\frac{2}{b_1}\right) e^{\frac{i\pi}{8} a_1 b_1} \psi(\tau),$$

$$\text{II.}\quad \psi(\tau') = \left(\frac{2}{a_1}\right) e^{-\frac{i\pi}{8} a_1 b_1} \varphi(\tau),$$

$$\text{III.}\quad \psi(\tau') = e^{\frac{i\pi}{8} a_1 b_1} \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)},$$

$$\text{IV.}\quad \psi(\tau') = \left(\frac{2}{a_1}\right) e^{\frac{i\pi}{8} a_1 b_1} \frac{1}{\varphi(\tau)},$$

$$\text{V.}\quad \psi(\tau') = \left(\frac{2}{b_1}\right) e^{-\frac{i\pi}{8} a_1 b_1} \frac{1}{\psi(\tau)},$$

$$\text{VI.}\quad \psi(\tau') = e^{-\frac{i\pi}{8} a_1 b_1} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}.$$

Es sind diese Tabellen zuerst von Hermite aufgestellt worden. Ausser diesen beiden Functionen $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ betrachtet Hermite aber noch eine dritte Function, welche sich nach mehrfacher Richtung hin von Bedeutung gezeigt hat und auf welche daher kurz eingegangen werden möge.

Es ist:

$$\varphi(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} [(1+q^2)(1+q^4)\ldots]^2 (1-q)(1-q^3)\ldots$$
$$\psi(\tau) = (1+q^2)(1+q^4)\ldots[(1-q)(1-q^3)\ldots]^2.$$

Setzen wir daher:

$$\text{11)}\qquad \chi(\tau) = \sqrt[6]{2}\, q^{\frac{1}{24}} (1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)\ldots,$$

so folgt:

$$\text{12)}\qquad \chi(\tau)^3 = \varphi(\tau) \,.\, \psi(\tau).$$

Um die Theorie der soeben definirten Function $\chi(\tau)$ handelt es sich, insbesondere darum, ihre lineare Transformation zu entwickeln. Die einzige Schwierigkeit, die hierbei auftritt, liegt in der Bestimmung der dritten Wurzel. Wir wollen dieselbe, dem Vorgange von Schläfli folgend, folgendermassen heben.

Wir beschränken uns auf den ersten Fall der linearen Transformation. Für diesen Fall wird sein:

$$\text{13)}\qquad \chi(\tau')^3 = \left(\frac{2}{a_0}\right)\left(\frac{2}{b_1}\right) e^{-\frac{i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)} \chi(\tau)^3.$$

Daneben folgen unmittelbar die Formeln:

$$\text{14)}\qquad \chi(\tau+2) = e^{\frac{2i\pi}{24}} \chi(\tau), \quad \chi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \chi(\tau).$$

Wir wollen nun den Factor von $\chi(\tau)^3$ in einer eigenthümlichen Weise umformen. Wir können denselben schreiben:

$$e^{\frac{\pi i f}{8}}$$

$$f = -a_0b_0 + a_0^2 - 1 + a_1b_1 + b_1^2 - 1.$$

Es ist nun:

$$a_0b_1 = 1 + a_1b_0 \equiv 1 \ mod\, 4,$$

also:

$$a_0 \equiv b_1 \ mod\, 4$$

und

$$a_0 - b_1 \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \equiv 4 \ mod\, 8.$$

Im zweiten Falle ist: $a_0b_1 \equiv 5 \ mod\, 8,$

daher $a_1b_0 \equiv 4 \ mod\, 8$, folglich $\frac{a_1}{2}$ und $\frac{b_0}{2}$ ungerade. Da ferner $\frac{a_0+b_1}{2}$ ungerade ist, so folgt:

$$a_0 + b_1 - a_1 \equiv 0, \quad a_0 + b_1 - b_0 \equiv 0 \ mod\, 4.$$

Unter solchen Umständen folgt in beiden Fällen:

$$(b_1 - a_0)(a_0 + b_1 - b_0) \equiv 0, \quad (b_1 - a_0)(a_0 + b_1 - a_1) \equiv 0 \ mod\, 16,$$

also:

$$-b_0a_0 + a_0^2 - 1 \equiv -b_1b_0 + b_1^2 - 1,$$

ferner:

$$a_1b_1 + b_1^2 - 1 \equiv a_1a_0 + a_0^2 - 1 \ mod\, 16,$$

$$\begin{aligned} -b_0a_0 + a_0^2 - 1 + a_1b_1 + b_1^2 - 1 &\equiv -b_1b_0 + b_1^2 - 1 + a_1b_1 + b_1^2 - 1, \\ &\equiv -b_0a_0 + a_0^2 - 1 + a_1a_0 + a_0^2 - 1, \\ &\equiv b_1(a_1 - b_0) \equiv a_0(a_1 - b_0) \ mod\, 16. \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$b_1(a_1b_0 + 1) - a_0 \equiv (b_1^2 - 1)a_0 \equiv 0 \ mod\, 8,$$

$$a_0(a_1b_0 + 1) - b_1 \equiv (a_0^2 - 1)b_1 \equiv 0 \ mod\, 8,$$

so dass wir unsern Ausdruck f auch schreiben können:

$$15) \quad f \equiv (b_0 - a_1)(a_1b_1b_0 - a_0) \equiv (b_0 - a_1)(a_0a_1b_0 - b_1) \ mod\, 16.$$

Diese Form von f besitzt gewisse Vorzüge.

Setzen wir an Stelle von $\tau' : \tau' + 2$, so wird:

$$\chi(\tau' + 2) = e^{\frac{2i\pi}{24}}\chi(\tau'),$$

andererseits ist diese Substitution gleichbedeutend damit, dass an Stelle von

$$a_0, \ b_0$$

gesetzt wird resp.:

$$a_0 - 2a_1, \quad b_0 - 2b_1.$$

Es geht dann f über in:

$$(b_0 - 2b_1 - a_1)(a_1b_0b_1 - a_0 + 2a_1).$$

Dieser Ausdruck ist aber:

$$\equiv 2 + (b_0 - a_1)(a_1b_0b_1 - a_0) \ mod\, 48.$$

Der Beweis kann in die beiden entsprechenden nach dem Modul 16 und nach dem Modul 3 getheilt werden. Der erste Theil ist von selbst

nach dem Früheren erledigt, das einzige neue liegt in dem Hinzutreten des Moduls 3. Hier zeigt eine leichte Betrachtung, die kaum näher durchgeführt zu werden braucht, die Richtigkeit der Behauptung.

Hieraus folgt, dass, wenn für ein Zahlensystem a_0, b_0, a_1, b_1 die Formel richtig ist:

$$\chi(\tau') = e^{\frac{i\pi}{24}(b_0-a_1)(a_1 b_1 b_0 - a_0)}\,\chi(\tau),$$

sie dann auch richtig bleibt, wenn links und rechts an Stelle von

$$a_0,\ b_0$$

gesetzt wird:

$$a_0 - 2a_1,\ \ b_0 - 2b_1.$$

Da das Analoge für die zweite Fundamentaltransformation auch der Fall ist, da ferner die soeben hingeschriebene Formel in den einfachsten Fällen, wie sofort sich ergiebt, richtig ist, so folgt, dass sie allgemeine Geltung im ersten Falle der linearen Transformation besitzt. Der Exponent kann in mehrfache Formen gekleidet werden. Hermite giebt demselben eine etwas andere Form. Er setzt:

$$16)\quad \begin{cases} \chi(\tau') = \varrho\left(\dfrac{2}{a_0 b_1}\right) e^{-\frac{3i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)}\,\chi(\tau), \\ \varrho = e^{-\frac{3i\pi}{8}(a_1 b_1 + b_1 b_0 + a_1 a_0 - a_1^2 b_0 b_1)}. \end{cases}$$

Auch hier braucht die Uebereinstimmung nur nach dem Modul 3 bewiesen zu werden, da die Schwierigkeiten in Bezug auf den Modul 16 sämmtlich gehoben sind, nach dem Modul 3 ist aber die Betrachtung eine so einfache, dass wir von derselben absehen können.

In ähnlicher Weise sind die andern Fälle zu erledigen. Wir geben die Tabelle in der Hermite'schen Form, wenn auch bei anderer Bezeichnungsweise.

$$\text{I.}\ \ \chi(\tau') = \varrho\left(\frac{2}{a_0 b_1}\right) e^{-\frac{3i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)}\,\chi(\tau),$$

$$\text{II.}\ \ \chi(\tau') = \varrho\left(\frac{2}{a_1 b_0}\right) e^{\frac{3i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)}\,\chi(\tau),$$

$$\text{III.}\ \ \chi(\tau') = -\,\varrho\left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{3i\pi}{8}(a_0 b_0 + a_1 b_1)}\,\frac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)},$$

$$\text{IV.}\ \ \chi(\tau') = -\,\varrho\left(\frac{2}{b_0}\right) e^{-\frac{3i\pi}{8}(a_0 b_0 + a_1 b_1)}\,\frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

$$\text{V.}\ \ \chi(\tau') = \varrho\left(\frac{2}{b_1}\right) e^{-\frac{3i\pi}{8}(a_0 b_0 + a_1 b_1)}\,\frac{\chi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

$$\text{VI.}\ \ \chi(\tau') = \varrho\left(\frac{2}{a_1}\right) e^{\frac{3i\pi}{8}(a_0 b_0 + a_1 b_1)}\,\frac{\chi(\tau)}{\varphi(\tau)}.$$

Indem wir die Theorie der linearen Transformation der drei Functionen $\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau)$ entwickelt haben, haben wir zu gleicher Zeit das analoge Problem für drei Functionen gelöst, die wir früher definirt haben. In der That, in Paragraph 22 sind drei Functionen $f(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau)$ eingeführt worden durch die Gleichungen:

$$17) \qquad \begin{cases} f(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \prod (1 + q^{2n-1}), \\ f_1(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \prod (1 - q^{2n-1}), \\ f_2(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod (1 + q^{2n}). \end{cases}$$

Vergleicht man diese Darstellungen mit den Entwickelungen der Hermite'schen Functionen, so folgt:

$$18) \quad f(\tau) = \frac{\sqrt[6]{2}}{\chi(\tau)}, \qquad 19) \quad f_1(\tau) = \sqrt[6]{2}\,\frac{\psi(\tau)}{\chi(\tau)}, \qquad 20) \quad f_2(\tau) = \sqrt[6]{2}\,\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}.$$

Es stehen also die früher definirten Functionen $f_\alpha(\tau)$ mit den Hermite'schen Functionen im innigsten Zusammenhang, so zwar, dass die lineare Transformation der letzteren die fertigen Formeln für die ersteren nach sich zieht. Etwas Aehnliches gilt für die am selben Orte eingeführte Function $\eta(\tau)$.

Es ist:

$$21) \qquad \vartheta_3 = \eta(\tau) f(\tau)^2, \text{ etc.}$$

und damit die Theorie der $\eta(\tau)$-Function auf die der ϑ-Functionen für die Nullwerthe der Argumente und der $f(\tau)$-Functionen zurückgeführt.

§ 66.[30])

Die Modulargleichungen.

Wir gehen jetzt zur Transformation n^{ten} Grades über und zwar nehmen wir an, dass n eine ungerade Zahl sei. Dann wissen wir, dass eine jede solche allgemeine Transformation ersetzt werden kann durch lineare Transformationen und durch specielle Transformationen n^{ten} Grades, bei welchen der transformirte Modul τ' die Form hat:

$$\tau' = \frac{t\tau - \xi}{t_1}, \qquad t \, . \, t_1 = n,$$

und ξ überdies durch 16 theilbar angenommen werden kann. Setzen wir diese Werthe in die $\varphi(\tau)$-Function ein, so erhalten wir die Ausdrücke:

$$\varphi\left(\frac{t\tau - \xi}{t_1}\right).$$

Dieses sind erstens eindeutige Functionen von τ, zweitens aber auch algebraische Functionen von k^2.

Es folgt das unmittelbar aus der früher entwickelten Formel:

$$\sqrt{c} = (\sqrt{k})^n \prod \frac{cn^2 \frac{\nu \omega}{n}}{dn^2 \frac{\nu \omega}{n}}$$

und aus den Multiplicationsformeln.

Um nun vermöge dieser Functionen zu Modulfunctionen zu gelangen, denken wir uns an Stelle von τ gesetzt:

$$\frac{b_0 - a_0 \tau}{a_1 \tau - b},$$

wo unter

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

die allgemeinste lineare Transformation verstanden werden soll. Diese beiden Transformationen können durch das Product dargestellt werden:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t & 0 \\ \xi & t_1 \end{vmatrix}.$$

Der Hauptsatz nun, auf welchen sich unsere späteren Betrachtungen stützen, lautet, dass wir dieses Product in die Form bringen können:

$$\begin{vmatrix} u & 0 \\ x & u_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix},$$

wobei die zweite Transformation wieder eine lineare bedeutet, $u u_1 = n$ und x durch 16 theilbar ist.

Bei der fundamentalen Wichtigkeit des Satzes wollen wir eine genaue Begründung desselben bringen, wobei wir bemerken, dass analoge Sätze in Zukunft nur kurz begründet werden sollen. Es möge in Bezug hierauf auf die entsprechende Darstellung in dem Königsberger'schen Lehrbuch über elliptische Functionen verwiesen werden.

Um die Richtigkeit der Behauptung nachzuweisen, müssen die Gleichungen untersucht werden:

$$1) \quad \begin{cases} a_0 t + a_1 \xi = u \alpha_0, \\ a_1 t_1 = u \alpha_1, \\ b_0 t + b_1 \xi = x \alpha_0 + u_1 \beta_0, \\ b_1 t_1 = x \alpha_1 + u_1 \beta_1, \\ a_0 b_1 - b_0 a_1 = \alpha_0 \beta_1 - \beta_0 \alpha_1 = 1. \end{cases}$$

Da α_0 und α_1 jedenfalls relative Primzahlen sein müssen, so ist u als grösster gemeinsamer Theiler der Zahlen:

$$a_0 t + \alpha_1 \xi \quad \text{und} \quad a_1 t_1$$

bestimmt, ferner u_1 aus der Beziehung:

$$uu_1 = n. \tag{2}$$

Ferner folgt:

$$\alpha_0 = \frac{a_0 t + a_1 \xi}{u}, \tag{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1 t_1}{u}. \tag{4}$$

Setzen wir diese Werthe in die vierte Gleichung ein, so erhalten wir:

$$b_1 u t_1 = a_1 t_1 x + u u_1 \beta_1,$$

oder auch:

$$b_1 u = a_1 x + t \beta_1. \tag{5}$$

Wir können diese Gleichung als eine diophantische mit den beiden Unbekannten β_1 und x ansehen. Dieselbe ist offenbar lösbar. Nennen wir ein System von Auflösungen von $x, \beta_1 : X, B_1$, so haben alle Auflösungen die Form:

$$\beta_1 = B_1 - r\frac{a_1}{\delta}, \quad x = X + r\frac{t}{\delta},$$

wenn r eine beliebige ganze Zahl bedeutet und δ der grösste gemeinsame Theiler von t und a_1 ist, der, wie kaum bemerkt zu werden braucht, auch ein Theiler von u ist.

Es bleibt noch übrig, zu zeigen, dass r so bestimmt werden kann, dass der Gleichung:

$$\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 = 1$$

genügt wird oder, was dasselbe sagt, der Gleichung:

$$a_1 t_1 \beta_0 + \frac{a_1}{\delta}(a_0 t + a_1 \xi) r = (a_0 t + a_1 \xi) B_1 - u.$$

Es ist dieses eine auflösbare diophantische Gleichung in r und β_0. In der That, dividirt man die Gleichung durch a_1 und erwägt, dass:

$$\xi B_1 + \frac{a_0 t B_1 - u}{a_1} = \xi B_1 + \frac{a_0(b_1 u - a_1 X) - u}{a_1} = b_0 u - a_0 X + \xi B_1$$

ist, so können wir sie schreiben:

$$t' \beta_0 + \frac{a_0 t + a_1 \xi}{\delta} r = b_0 u - a_0 X + \xi B_1,$$

wobei der Factor von r sicherlich eine ganze Zahl ist.

Nun ist aber:

$$b_0 u - a_0 X + \xi B_1 = b_0 u - \frac{a_0 b_1}{a_1} u + \frac{\alpha_0 B_1}{a_1} u = \frac{u(\alpha_0 B_1 - 1)}{a_1},$$

also folgt die Gleichung:

$$t_1 \beta_0 + \frac{a_0 t + a_1 \xi}{\delta} r = \frac{u(\alpha_0 B_1 - 1)}{a_1},$$

worin die rechte Seite eine ganze Zahl darstellt. Da nun δ ein Theiler von a_1 sowohl als auch von u ist, so kann die Gleichung geschrieben werden:

$$6) \qquad t_1 \beta_0 + \frac{a_0 t + a_1 \xi}{\delta} r = \frac{u}{\delta} \left(\frac{\alpha_0 B_1 - 1}{\frac{a_1}{\delta}} \right).$$

Nun sind $\frac{u}{\delta}$ und $\frac{a_1}{\delta}$ relativ prim zu einander, da δ der grösste gemeinsame Theiler von u und a_1 ist, es ist also:

$$\frac{\alpha_0 B_1 - 1}{\frac{a_1}{\delta}}$$

eine ganze Zahl. Da endlich der grösste gemeinsame Theiler von

$$a_1 t_1 \quad \text{und} \quad a_0 t + a_1 \xi$$

u war, so wird der grösste gemeinsame Theiler von:

$$\frac{a_1}{\delta} t_1 \quad \text{und} \quad \frac{a_0 t - a_1 \xi}{\delta}$$

$\frac{u}{\delta}$ und daher der von

$$t_1 \quad \text{und} \quad \frac{a_0 t - a_1 \xi}{\delta}$$

ein Theiler von $\frac{u}{\delta}$, so dass, wenn man die letzte Gleichung für β_0 und r durch den grössten gemeinsamen Theiler dieser beiden Zahlen dividirt, sich auf der rechten Seite wieder eine ganze Zahl ergiebt und daher die unbestimmte Gleichung wirklich in ganzen Zahlen aufgelöst werden kann.

Dass x durch 16 theilbar angenommen werden kann, braucht nicht näher auseinandergesetzt zu werden. Wir haben die Betrachtung allgemeiner durchgeführt, als wir sie thatsächlich brauchen, denn wir wollen bei der Theorie der Transformationsgleichungen uns im Wesentlichen auf ungerade Primzahlen beschränken, da nach dem Früheren der Fall eines allgemeinen ungeraden n sich auf diesen speciellen zurückführen lässt.

Wir nehmen also jetzt an, dass n eine ungerade Primzahl sei und setzen:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 2, \quad b_1 = 1,$$

dann folgt, dass $\varphi(n\tau)$ übergeht in:

$$e^{-\frac{2i\pi n}{8}}\varphi(n\tau),$$

ferner $\varphi\left(\frac{\tau - 16\xi}{n}\right)$ in $e^{-\frac{2i\pi n}{8}}\varphi\left(\frac{\tau - 16x}{n}\right)$, wobei zwischen ξ und x eine leicht angebbare Beziehung besteht.

Hieraus folgt, dass die Summe:

$$S_1 = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau) + \sum\varphi\left(\frac{\tau - 16\xi}{n}\right)}{\varphi(\tau)^n}$$

für die Transformation:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ungeändert bleibt, wobei die Summe über $\xi = 0, 1, \ldots n - 1$ zu erstrecken ist.

Genau dasselbe gilt aber, wenn wir setzen:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1,$$

d. h. die zweite Fundamentalsubstitution anwenden. Die Richtigkeit der Behauptung folgt durch Specialisirung der allgemeinen vorhin angegebenen Sätze. Hieraus folgt, dass die Summe S_1 für alle linearen Transformationen des ersten Falles ungeändert bleibt, sich also rational durch k^2 darstellen lassen muss.

Dasselbe gilt offenbar für alle Summen:

$$S_r = \frac{\left[\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau)\right]^r + \sum\varphi\left(\frac{\tau - 16\xi}{n}\right)^r}{\varphi(\tau)^{rn}}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den fundamentalen

Lehrsatz: Die $n + 1$ Grössen:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau) : \varphi(\tau)^n \quad \text{und} \quad \varphi\left(\frac{\tau - 16\xi}{n}\right) : \varphi(\tau)^n$$

sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten sich rational durch k^2 darstellen lassen.

Wir können auch so sagen:

Die $n + 1$ Grössen $\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau)$ und $\varphi\left(\frac{\tau - 16\xi}{n}\right)$ sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade $n + 1$, deren

Coefficienten sich rational durch $\varphi(\tau)$ darstellen lassen. Diese Gleichungen nennen wir Modulargleichungen.

Die numerischen Coefficienten, welche in diesen Gleichungen auftreten, müssen ganze Zahlen sein, da die Coefficienten in den Entwickelungen von:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau):\varphi(\tau)^n \text{ und } k^2$$

nach Potenzen von $q^{\frac{1}{8}}$ rationale Zahlen sind.

Im Allgemeinen werden wir im Folgenden die Modulargleichungen in der zweiten Form untersuchen.

§ 67.

Zweite Darstellung der Wurzeln der Modulargleichungen. Haupteigenschaften derselben.

Wir haben die Wurzeln der soeben definirten Modulargleichungen mit Hülfe der Hermite'schen φ-Function dargestellt. Es kann noch eine andere Darstellung gegeben werden.

Wir hatten seiner Zeit gefunden:

$$\sqrt{c} = (\sqrt{k})^n \left(snc\frac{\omega}{n}\cdot snc\frac{2\omega}{n}\cdots snc\frac{n-1}{2}\frac{\omega}{n}\right)^2.$$

Es möge bemerkt werden, dass auch die allgemeinere Form gewählt werden kann:

$$\sqrt{c} = (\sqrt{k})^n \left(snc\frac{m\omega}{n}\cdot snc\frac{2m\omega}{n}\cdots snc\frac{n-1}{2}\frac{m\omega}{n}\right)^2,$$

wenn m irgend eine zu n relativ prime Zahl bedeutet. Daraus folgt, dass die Wurzeln der Modulargleichung sich von den Grössen:

$$\varphi(\tau)^n snc\frac{m\omega}{n}\cdot snc\frac{2m\omega}{n}\cdots snc\frac{n-1}{2}\frac{m\omega}{n}$$

nur um das Vorzeichen unterscheiden können. Dieses Zeichen soll jetzt bestimmt werden. Wir setzen dazu:

$$1) \qquad u = \varphi(\tau),$$

während $m = 2$ gesetzt wird, und definiren v durch:

$$2) \qquad v = u^n . snc\frac{2\omega}{n}\cdot snc 2\cdot\frac{2\omega}{n}\cdots snc\frac{n-1}{2}\frac{2\omega}{n}.$$

Für den Repräsentanten:

$$\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

können wir setzen:

$$\omega = 2K,$$

erhalten also:

$$v = u^n \, snc\frac{4K}{n} \cdot snc\frac{8K}{n} \cdots snc\frac{2(n-1)K}{n},$$

während andrerseits ist:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau) = \left(\frac{2}{n}\right)\sqrt{2}\, q_1^{\frac{1}{8}} \frac{(1+q_1^2)(1+q_1^4)\ldots}{(1+q_1)(1+q_1^3)\ldots}$$

$$q_1 = e^{\pi i n \tau}.$$

Diese beiden Ausdrücke können sich nur um das Vorzeichen von einander unterscheiden. Dabei wird man nur nöthig haben, sie für ein specielles τ mit einander zu vergleichen. Wir wollen nun diejenigen Werthe von τ ins Auge fassen, für welche q sich der Null nähert, K der Grenze $\frac{\pi}{2}$, K' der Grenze ∞, k^2 der Grenze Null. Da:

$$snc\frac{2Ku}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{k}} q^{\frac{1}{4}} \cos u \prod \frac{1+2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}}{1+2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}}$$

ist, so folgt, dass $snc\frac{2Ku}{\pi}$ sich der Grenze:

$$\frac{2}{\sqrt{k}} q^{\frac{1}{4}} \cos u$$

nähert. Hieraus folgt, dass wir zu setzen haben an Stelle von:

$$snc\frac{4K}{n}\, snc\frac{8K}{n} \cdots snc\frac{2(n-1)K}{n}$$

die Grösse:

$$\frac{2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[4]{q^{\frac{n-1}{2}}}}{\sqrt{k^{\frac{n-1}{2}}}} \cos\frac{2\pi}{n} \cdot \cos\frac{4\pi}{n} \cdots \cos\frac{(n-1)\pi}{n}$$

oder also, da:

$$\cos\frac{2\pi}{n} \cdot \cos\frac{4\pi}{n} \cdots \cos\frac{(n-1)\pi}{n} = \pm \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$$

ist, wobei das Vorzeichen gleich dem Werthe des Legendre'schen Symbols:

$$\left(\frac{2}{n}\right)$$

ist:

$$\frac{\left(\frac{2}{n}\right)\sqrt[4]{q^{\frac{n-1}{2}}}}{\sqrt{k^{\frac{n-1}{2}}}}.$$

Mithin haben wir für v in erster Annäherung zu setzen:

$$\left(\frac{2}{n}\right) 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{n}{8}}.$$

Daraus folgt, dass:

$$\frac{\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau)}{v}$$

sich der positiven Einheit nähert, oder also, dass wir setzen können:

$$3) \qquad v = \left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau) = \sqrt[4]{k^n}\, snc\frac{4K}{n}\cdot snc\frac{8K}{n}\cdots snc\frac{2(n-1)K}{n}.$$

Genau so folgt, dass wir setzen können:

$$4) \; \varphi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right) \; \sqrt[4]{k^n}\, snc\frac{4K}{n}(\tau-16\xi)\, snc\frac{8K}{n}(\tau-16\xi)\cdots snc\frac{2(n-1)K}{n}(\tau-16\xi).$$

So haben wir eine zweite Darstellung der Wurzeln der Modulargleichung erhalten, welche für die Folge von Bedeutung ist und welche der ganzen Theorie hätte zu Grunde gelegt werden können. Dieser doppelte Ausgangspunkt ist für die Transformationstheorie charakteristisch und wird sich auch in der Folge zeigen.

Wir wollen nun setzen:

$$5) \qquad v_\xi = \varphi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right), \quad v_\infty = \left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau),$$

dann können wir auch so uns ausdrücken:

Die $(n+1)$ Grössen $v_0, v_1 \ldots v_{n-1}, v_\infty$ sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade $n+1$, deren Coefficienten sich rational durch u darstellen lassen.

Die Haupteigenschaften dieser Gleichungen sind leicht zu entwickeln, und zwar ist es vor Allem die Anwendung der linearen Transformation, welche zum Ziele führt. Da wir die Art dieser Betrachtungen an einem Beispiele ausführlich dargelegt haben und neue Momente nicht auftreten, so begnügen wir uns damit, die Sätze im Wesentlichen ohne weitere Begründung aufzustellen.

I. Die Modulargleichungen bleiben ungeändert, wenn an Stelle von u und v resp. gesetzt wird:

$$ue^{\frac{2i\pi h}{8}} \text{ und } ve^{\frac{2i\pi nh}{8}}.$$

II. Die definirten Gleichungen sind irreductibel, d. h. eine jede Gleichung, deren Coefficienten sich rational aus u zusammensetzen lassen und die eine Wurzel v mit ihnen gemeinsam hat, hat alle Wurzeln v mit ihr gemeinsam.

III. Die Modulargleichungen bleiben ungeändert, wenn v mit u, $\left(\frac{2}{n}\right)u$ mit v vertauscht wird.

Legt man ferner an Stelle von τ die Grösse $\frac{\tau}{1+\tau}$, also an Stelle von u die Grösse $\frac{1}{u}$ zu Grunde, endlich an Stelle von τ die Grösse $-\frac{1}{\tau}$, von u die Grösse $u_1 = \psi(\tau)$ zu Grunde, so folgt:

IV. Die definirten Gleichungen bleiben ungeändert, wenn $\frac{1}{u}$ statt u, $\frac{1}{v}$ statt v gesetzt wird, sie bleiben ferner ungeändert, wenn u_1 statt u, v_1 statt v gesetzt wird, wobei die Bedeutung von v_1 kaum näher auseinandergesetzt zu werden braucht.

Wir können nun die Modulargleichung schreiben:

$$C_0 v^{n+1} + C_1 v^n + \cdots C_n v + C_{n+1} = 0,$$

wobei die Grössen C ganze Functionen von u bedeuten. Aus der Darstellung der Wurzeln durch die Hermite'sche φ-Function folgt aber, dass C_0 eine Constante sein muss, da die Wurzeln für keinen der in Betracht kommenden Werthe von τ oder k^2 unendlich werden können. Wir wollen und können dann die Constante C_0 der Einheit gleich setzen. Die Form der übrigen Coefficienten muss die folgende sein:

$$C_1 = u^{m_1}(a_{01} + a_{11}u^8 + a_{21}u^{16} + \cdots),$$
$$C_2 = u^{m_2}(a_{02} + a_{12}u^8 + a_{22}u^{16} + \cdots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{n+1} = u^{m_{n+1}}(a_{0\,n+1} + a_{1\,n+1}u^8 + \cdots),$$

wobei die Zahlen $m_1, m_2, \ldots$ ganze Zahlen bedeuten, die kleiner als 8 sind. Ihre Werthe können leicht berechnet werden. Erwägen wir nämlich, dass die Grössen:

$$\frac{v}{u^n}$$

Wurzeln einer Gleichung sind, deren Coefficienten sich rational aus u^8 zusammensetzen lassen, so folgt:

$$m_1 \equiv n \bmod 8,$$
$$m_2 \equiv 2n \bmod 8$$
$$\cdots\cdots$$
$$m_{n+1} \equiv (n+1)n \equiv n+1 \bmod 8.$$

Da die Gleichung ungeändert bleibt, wenn v mit u, $\left(\frac{2}{n}\right) u$ mit v vertauscht wird, so folgt, dass die höchste vorkommende Potenz von u die $n+1^{\text{te}}$ sein muss; da ferner die Gleichung ungeändert bleibt, wenn

$\frac{1}{u}$ statt u, $\frac{1}{v}$ statt v gesetzt wird, so muss das letzte Glied C_{n+1} den Werth haben:

$$C_{n+1} = \left(\frac{2}{n}\right) u^{n+1}.$$

Ausser v^{n+1} kann daher kein von u freies Glied vorkommen, so dass alle Wurzeln gleich Null werden, wenn wir $u = 0$ setzen.

Wir wollen noch kurz die Werthe der Wurzeln bestimmen, wenn $u = 1$ wird.

Die Wurzeln der Modulargleichung haben die Form:

$$v = u^n snc \frac{2\omega}{n} \cdot snc\, 2 \cdot \frac{2\omega}{n} \cdots snc \frac{n-1}{2} \frac{2\omega}{n}.$$

Nun ist:

$$sncu = sn(K-u) = itn\left(\frac{K-u}{i}, k'\right),$$

wenn unter dem Symbol tnu der Quotient der Sinus- und der Cosinusamplitude verstanden wird. Wir wollen zusehen, welche Werthe nehmen die Wurzeln der Modulargleichung an, wenn $u = 1$ wird. Es wird dann $k^2 = 1$, $k' = 0$, K wächst über alle Grenzen, K' wird gleich $\frac{\pi}{2}$, die Sinusamplitude, die zu dem Modul Null gehört, geht in den Sinus über, die Tangensamplitude in die Tangente. Hieraus folgt dann, dass

$$snc\left(4r \frac{mK + m_1 iK'}{n}, k\right)$$

für $k = 1$ gleich ± 1 wird, je nachdem

$$n - 4mr \gtrless 0$$

ist.

Erwägen wir nun, dass ω für die Wurzeln der Modulargleichung entweder den Werth:

$$2K$$

oder aber die Werthe:

$$2K(\tau - 16\xi)$$

besitzt, so folgt leicht:

Für $u = 1$ werden sämmtliche Wurzeln der Modulargleichung gleich 1, wenn $n = 8\mu \pm 1$ ist; es reducirt die Modulargleichung sich also auf:

$$(v-1)^{n+1} = 0.$$

Ist dagegen $n = 8\mu \pm 3$, so ist für $u = 1$ ein Werth von v gleich 1, die übrigen gleich -1, die Modulargleichung reducirt sich also auf:

$$(v-1)(v+1)^n = 0.$$

§ 68.

Regeln für die wirkliche Aufstellung von Modulargleichungen. Anwendung auf die einfachsten Fälle.

Bei der wirklichen Aufstellung von Modulargleichungen kann nach mannigfachen Methoden vorgegangen werden. Diejenige Methode, die sich zunächst darbietet, ist die folgende.

Es ist:

$$1)\quad\begin{cases} u = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^2(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots \\ \quad = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}(1-q+2q^2-3q^3+4q^4-6q^5+9q^6-12q^7+16q^8-22q^9+29q^{10}\ldots). \end{cases}$$

Hieraus können dann die Potenzen von u unmittelbar nach Potenzen von $q^{\frac{1}{8}}$ entwickelt werden.

Ferner wird:

$$2)\qquad v_\infty = \left(\frac{2}{n}\right)\sqrt{2}\,q^{\frac{n}{8}}(1-q^n+2q^{2n}-3q^{3n}+4q^{4n}\ldots).$$

Setzt man diese Entwickelungen in die Modulargleichung ein, so werden, wie aus der früher aufgestellten Form unmittelbar folgt, die Irrationalitäten in Bezug auf q fortfallen. Ordnet man die linke Seite nach Potenzen von q, so muss sich eine identische Gleichung ergeben. Setzt man die einzelnen Coefficienten der Null gleich, so ergeben sich lineare Gleichungen, aus denen die noch unbekannten numerischen Constanten in der Modulargleichung zu bestimmen sind.

Will man z. B. die Modulargleichung für die Transformation dritten Grades aufstellen, so hat man die Gleichung anzusetzen:

$$v^4 + a_0 v^3 u^3 + b_0 vu - u^4 = 0.$$

Setzt man nun die obigen Reihenentwickelungen für u und v und deren Potenzen in diese Gleichung ein, so ergiebt sich:

$$4q(1-4q^3-4q^6\ldots) - 8a_0 q(1-3q^3-9q^6\ldots)(1-3q-9q^2\ldots)$$
$$- 2b_0(1-q^3+2q^6+\ldots)(1-q+2q^2\ldots) - 4(1-4q-4q^2\ldots) = 0,$$

und hieraus folgen für die beiden numerischen Constanten a_0 und b_0 die Gleichungen:

$$2b_0 = -4,\quad 4 - 8a_0 + 2b_0 + 16 = 0,$$

oder also:

$$a_0 = 2,\quad b_0 = -2.$$

Die Modulargleichung, welche zur Transformation dritten Grades gehört, ist daher die folgende:

$$3)\qquad v^4 - u^4 + 2uv(1-u^2v^2) = 0.$$

Genau so findet man die Modulargleichungen für die Transformationen fünften, siebenten und elften Grades.

4) $$v^6 - u^6 - 4uv(1 - u^4v^4) + 5u^2v^2(v^2 - u^2) = 0.$$

5) $$v^8 - 8u^7v^7 + 28u^6v^6 - 56u^5v^5 + 70u^4v^4 - 56u^3v^3 + 28u^2v^2 - 8uv + u^8 = 0$$

oder auch:

$$(1 - u^8)(1 - v^8) = (1 - uv)^8.$$

6) $$\left\{\begin{array}{l} v^{12} - u^3v^{11}(22 - 32u^8) + 44u^6v^{10} + 22uv^9(1 + 4u^8) + 165u^4v^8 \\ + 132u^7v^7 + 44u^2v^6(1 - u^8) - 132u^5v^5 - 165u^8v^4 - 22u^3v^3(4 + u^8) \\ - 44u^6v^2 - uv(32 - 22u^8) - u^{12} = 0. \end{array}\right.$$

Die Rechnungen, die sich bei dieser Methode schon in den einfachsten Fällen ergeben, müssen als recht umfangreiche bezeichnet werden. Eine Erleichterung giebt hierbei der früher gefundene Satz, dass für $u = 1$ die Wurzeln der Modulargleichung entweder $+1$ oder -1 werden. Nehmen wir z. B. die Modulargleichung, die zu der Transformation dritten Grades gehört, so hat dieselbe die Form:

$$v^4 + a_0 v^3 u^3 + b_0 vu - u^4 = 0.$$

Setzen wir $u = 1$, so nimmt sie die Form an:

$$v^4 + a_0 v^3 + b_0 v - 1 = (v - 1)(v + 1)^3 = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar $a_0 = 2$, $b_0 = -2$. Aehnlich verhält es sich in den anderen Fällen.

Eine andere Methode ist die folgende. Nennen wir die Potenzsummen der Wurzeln $S_1, S_2, \ldots$, so bestehen zwischen ihnen und den Coefficienten die Beziehungen:

$$S_1 + C_1 = 0,$$
$$S_2 + S_1 C_1 + 2C_2 = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die Grössen S können in der Form von unendlichen Reihen dargestellt werden. Um das Verfahren auseinanderzusetzen, wollen wir uns auf die Berechnung von S_1 beschränken.

Setzen wir:

$$f(q) = 1 - q + 2q^2 - 2q^3 + 4q^4 - 6q^5 + 9q^6 - 12q^7 \ldots$$
$$= \sum A_m q^m,$$

so wird:

$$v_r = \sqrt{2}\left(\alpha^r q^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{8}} f\left(\alpha^r q^{\frac{1}{n}}\right), \qquad r = 0, 1, \ldots n - 1,$$

$$v_\infty = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \sqrt{2}\, q^{\frac{n}{8}} f(q^n),$$

wobei gesetzt ist:

$$\alpha = e^{-\frac{16\pi i}{n}}.$$

Daraus folgt, dass wir die Gleichung erhalten:

$$(v_0 + v_1 + \cdots v_{n-1}) \sqrt{\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty {}^m \sum_0^{n-1} {}^r A_m \left(\alpha^r q^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{8m+1}{8}}.$$

Der Factor von A_m ist also:

$$\sum \left(\alpha^r q^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{8m+1}{8}}.$$

Da $\alpha^n = 1$ ist, so verschwindet diese Summe, wenn $8m + 1$ kein Multiplum von n ist. Wenn aber

$$8m + 1 = ln$$

ist, so reducirt sich die Summe auf $nq^{\frac{l}{8}}$. Es ergiebt sich somit:

$$v_0 + v_1 + \cdots v_{n-1} + v_\infty = S_1 = \left(\frac{2}{n}\right)\sqrt{2}\, q^{\frac{n}{8}} (1 + A_1 q^n + A_2 q^{2n} + \cdots)$$
$$+ n\sqrt{2}\, q^{\frac{l}{8}} (A_m + A_{m+n} q + A_{m+2n} q^2 + \cdots),$$

wobei dann m und l die kleinsten positiven ganzen Zahlen sind, zwischen denen die vorhin hingeschriebene Gleichung besteht, und zwar wird in den einfachsten Fällen sein:

für $n = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$
„ $m = 1, 3, 6, 4, 8, 2, 7, \ldots$
„ $l = 3, 5, 7, 3, 5, 1, 3, \ldots$

Vermöge der Betrachtungen, die über die Coefficienten der Modulargleichung angestellt worden sind, folgt leicht, dass die Reihe:

$$q^{\frac{l}{8}} (A_m + A_{m+n} q + A_{m+2n} q^2 + \cdots)$$

nur bis zu dem Term fortzusetzen ist:

$$A_{m+ns} q^{\frac{l+8s}{8}},$$

in welchem $l + 8s$ der Zahl n am nächsten kommt; es folgt ferner, dass von $f(q^n)$ nur der eine Term:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\sqrt{2}\, q^{\frac{n}{8}}$$

mit in Rechnung zu ziehen ist.

Unter solchen Umständen können wir uns darauf beschränken, für die Grösse S_1 in den einfachsten Fällen die folgenden Ausdrücke hinzuschreiben:

$$n = 3, \quad S_1 = \sqrt{2}\,(-1 + 3A_1) q^{\frac{3}{8}},$$
$$n = 5, \quad S_1 = \sqrt{2}\,(-1 + 5A_3) q^{\frac{5}{8}},$$
$$n = 7, \quad S_1 = \sqrt{2}\,(-1 + 7A_6) q^{\frac{7}{8}},$$
$$n = 11, \quad S_1 = \sqrt{2}\,[(-1 + 11A_{15}) q + 11A_4] q^{\frac{3}{8}},$$

. . . .

Andererseits sind diese ersten Potenzsummen aber gleich $-C_1$, also

für $n = 3: -a_0 u^3$,
„ $n = 5: -a_0 u^5$,
„ $n = 7: -a_0 u^7$,
„ $n = 11: -(a_0 + a_1 u^8) u^3$,
. . . .

Setzen wir für die Potenzen von u ihre Darstellungen durch die Grössen q ein und vergleichen, so erhalten wir für die Coefficienten C_1 die früher bezeichneten Werthe.

In ähnlicher Weise sind die übrigen Coefficienten zu bezeichnen.

§ 69.

Die Multiplicatorgleichungen.

Setzen wir das Argument der transformirten Functionen gleich

$$Mu,$$

so ist M der Multiplicator der Transformation, und zwar ist hierbei:

$$M = \frac{\theta_3^2}{\vartheta_3^2}(a_0 + a_1 \tau'). \tag{1}$$

Diese Darstellung giebt den Werth von M für die lineare Transformation unmittelbar, wie aus den früheren Betrachtungen klar ist. Wir wollen die hierauf bezüglichen Resultate noch einmal kurz zusammenstellen.

I. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \mod 2.$

$$M = e^{-\frac{i\pi}{2}(a_0 - 1)}.$$

II. $a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \mod 2.$

$$M = e^{\frac{i\pi}{2}(2 - a_0 - b_0)}.$$

III. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \mod 2.$

$$M = e^{\frac{i\pi}{2}(a_0 b_0 + a_0 - 1)} \frac{1}{k}.$$

IV. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \mod 2.$

$$M = e^{\frac{i\pi}{2}(1 - a_0 - a_0 b_0)} \frac{1}{k}.$$

V. $a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \mod 2,$

$$M = e^{\frac{i\pi}{2}(1-a_0)} \frac{1}{k'}.$$

VI. $a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \mod 2,$

$$M = e^{-\frac{i\pi}{2}(a_0 b_1 - a_0 a_1 - a_0 - b_0 + 2)} \frac{1}{k'}.$$

Im allgemeinen Falle — wobei n wieder als ungerade Primzahl angenommen wird — gestalten die Verhältnisse sich complicirter. Wir hatten seiner Zeit das Resultat gefunden, dass die Functionen

$$sn(Mu)$$

sich als rationale Functionen von snu ausdrücken lassen. Die Coefficienten setzen sich rational aus den Constanten

$$\frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta_3} \quad \text{und} \quad \frac{\theta_\alpha}{\theta_3}$$

zusammen. Differenziren wir nach u und setzen u gleich Null, so folgt der

Lehrsatz: Für die Transformation n^{ten} Grades ist die Grösse M eine rationale Function der Grössen

$$\frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta_3} \quad \text{und} \quad \frac{\theta_\alpha}{\theta_3}.$$

Es empfiehlt sich nun, für die folgenden Betrachtungen an Stelle der Grösse M die Grössen:

$$\mu = (-1)^{\frac{t-1}{2}} M \tag{2}$$

einzuführen. Jedenfalls folgt, dass dieselben algebraische Functionen von k^2 sind. Wir wollen nun die Grössen bilden, die zu den Transformationen:

$$\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16\xi & n \end{vmatrix}$$

gehören und sie bezeichnen durch:

$$\mu_\infty, \ \mu_0, \ \mu_1, \dots \mu_{n-1}.$$

Dann ist klar, dass die Potenzsummen:

$$\sum \mu_r^l$$

algebraische Functionen von k^2 und eindeutige Functionen von τ sind.

Wenn nun (α_0, β_1) eine beliebige Transformation des ersten Grades ist, für welche die Diagonalglieder alle ungerade, die übrigen gerade sind, ferner (u_0, v_1) einen beliebigen Repräsentanten bedeutet, so findet, wie bewiesen, eine Gleichung statt:

$$(\alpha_0, \beta_1)(u_0, v_1) = (u_0', v_1')(\alpha_0', \beta_1'),$$

in welcher die erste Determinante rechts einen Repräsentanten, die zweite eine lineare Transformation derselben Art, wie die ursprüngliche, darstellt. Wir wollen die beiden zu den Repräsentanten links und rechts gehörenden Grössen μ durch μ_r und μ_{r_1} bezeichnen. Dann folgt leicht, dass der Ausdruck für μ_r in den Ausdruck für μ_{r_1} übergeht, wenn in ihm die Grösse τ durch die Grösse τ' ersetzt wird, welche durch die ursprüngliche lineare Transformation aus τ entstanden ist. Mithin sind die Potenzsummen:

$$\sum \mu_r^l$$

algebraische Functionen von k^2, welche für eine jede lineare Transformation des ersten Falles ungeändert bleiben. Es sind dieselben also rationale Functionen von k^2. Wir finden also den

Lehrsatz: Die Grössen μ sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade $n+1$, deren Coeffienten rationale Functionen von k^2 sind.

Dass auch in diesen Gleichungen die numerischen Constanten ganze Zahlen sein müssen, braucht nicht näher ausgeführt zu werden.

Die Eigenschaften der soeben definirten Gleichungen, die wir Multiplicatorgleichungen nennen, sind ähnlich einfacher Natur wie die der Modulargleichungen. Auch hier ist die lineare Transformation von massgebender Bedeutung, auch hier begnügen wir uns im Wesentlichen damit, die Eigenschaften aufzustellen, ohne sie in ausführlicher Weise zu begründen.

Wir hatten seiner Zeit gefunden:

$$\mu = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod \frac{sn^2 \frac{\nu\omega}{n} \cdot dn^2 \frac{\nu\omega}{n}}{cn^2 \frac{\nu\omega}{n}}, \tag{3}$$

wobei das Product nach ν in bekannter Weise zu nehmen ist. Diese Formel kann dazu dienen, um einen einfachen Ausdruck für das Product aller Wurzeln der Multiplicatorgleichung zu ergeben.

Dieses Product können wir schreiben:

$$\prod \mu = \prod \prod \frac{sn^2 \frac{\nu\omega}{n} \cdot dn^2 \frac{\nu\omega}{n}}{cn^2 \frac{\nu\omega}{n}},$$

wobei nunmehr das Product auf der rechten Seite einerseits nach ν zu nehmen ist, andererseits aber über alle $n+1$ ω zu erstrecken ist, die zu den einzelnen Repräsentanten gehören.

Andererseits war gefunden:

$$\sqrt{c} = (\sqrt{k})^n \prod \frac{cn^2 \frac{\nu\omega}{n}}{dn^2 \frac{\nu\omega}{n}}.$$

Da das Product aller Wurzeln der Modulargleichung bekannt ist, so folgt:

$$\prod\prod \frac{cn^2 \frac{\nu\omega}{n}}{dn^2 \frac{\nu\omega}{n}} = k^{-\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}.$$

Es bleibt daher nur noch übrig, den Ausdruck zu bestimmen:

$$\prod\prod sn^2 \frac{\nu\omega}{n}.$$

Dieser Ausdruck ist aber bei Gelegenheit der Multiplication der elliptischen Functionen untersucht worden, wobei zu bemerken ist, dass das Product in einer formal verschiedenen inhaltlich aber gleichen Weise zu nehmen war. Wir hatten gefunden:

$$\prod\prod sn^2 \frac{\nu\omega}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}{k^{\frac{n^2-1}{2}}}.$$

Mithin finden wir:

$$4) \qquad \prod \mu = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n,$$

oder also wir erhalten den

Lehrsatz: Das Product aller Wurzeln der Multiplicatorgleichung ist gleich:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} n.$$

Ebenso einfach folgt der

Lehrsatz: Setzen wir in der Multiplicatorgleichung den Coefficienten von μ^{n+1} gleich 1, so sind die übrigen Coefficienten sämmtlich ganze Functionen von k^2.

In der That, jedenfalls können wir die Multiplicatorgleichung schreiben:

$$f_0(k^2)\mu^{n+1} + f_1(k^2)\mu^n + \cdots f_n(k^2)\mu + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n f_0(k^2) = 0,$$

wo unter den Functionen f sämmtlich ganze Functionen von k^2 zu verstehen sind. Wäre nun $f_0(k^2)$ von einer Constanten verschieden, so würden sich Werthe k^2 ergeben, für welche der Multiplicator Null oder unendlich wäre. Das aber geht nicht.

In der That, wir hatten den Werth:

$$\mu = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \cdot \frac{\theta_3^2}{\vartheta_3^2}.$$

Dieser Ausdruck kann aber für die in Frage kommenden Werthe von τ weder verschwinden, noch unendlich gross werden, wie aus den Untersuchungen hervorgeht, vermöge derer die Werthe von τ bestimmt werden können, die zu Werthen k^2 gehören.

Unter solchen Umständen können wir schreiben:

$$\mu^{n+1} + f_1(k^2)\mu^n + \cdots f_n(k^2)\mu + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 0.$$

Die lineare Transformation lehrt nun die Richtigkeit der folgenden Sätze:

I. Die Multiplicatorgleichung ist eine irreductibele Gleichung, d. h. eine jede algebraische Gleichung, deren Coefficienten sich rational aus k^2 zusammensetzen lassen und die eine Lösung mit der Multiplicatorgleichung gemeinsam hat, hat alle mit derselben gemeinsam.

II. Die Multiplicatorgleichung bleibt ungeändert, wenn $1-k^2$ an Stelle von k^2 und $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mu$ an Stelle von μ, ferner wenn $\frac{1}{k^2}$ statt k^2 und $\frac{\mu k}{c}$ statt μ gesetzt wird.

Die beiden letzten Eigenschaften lassen einige interessante Folgerungen zu.

In der That, aus der vorletzten Eigenschaft folgt, dass, wenn

$$n \equiv 1 \mod 4$$

ist, die Multiplicatorgleichung geschrieben werden kann:

$$5) \quad \mu^{n+1} + \varphi_1(k^2[1-k^2])\,\mu^n + \cdots \varphi_n(k^2[1-k^2])\,\mu + n = 0,$$

wobei die Grössen φ ganze Functionen des Arguments $k^2(1-k^2)$ sind. Ist dagegen:

$$n \equiv 3 \mod 4,$$

so lautet die Multiplicatorgleichung:

$$6) \quad \mu^{n+1} + \varphi_1(k^2[1-k^2])(k'^2-k^2)\,\mu^n + \varphi_2(k^2[1-k^2])\,\mu^{n-1} + \cdots$$
$$+ \cdots \varphi_n(k^2[1-k^2])(k'^2-k^2)\,\mu - n = 0;$$

die Functionen φ mit ungeradem Index sind noch mit dem Factor $k'^2 - k^2$ multiplicirt.

Die letzte Eigenschaft endlich kann dazu dienen, um eine obere Grenze für den Grad der einzelnen Coefficienten festzusetzen. In der That, nehmen wir an, dass $q = 0$ wird, so folgt aus den Definitionen

der Grössen k, c, μ durch die Thetareihen unmittelbar, dass $k = 0$, $c = 0$ wird, so zwar, dass

$$\lim \frac{k}{c} = \lim \frac{q^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{t}{2t_1}}} e^{\frac{8\pi i \xi}{t_1}}$$

ist, während die Grössen μ die Werthe annehmen:

$$\mu_0 = \mu_1 = \cdots \mu_{n-1} = 1, \quad \mu_\infty = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n.$$

Sehen wir die transformirte Gleichung als algebraische Gleichung mit der Unbekannten

$$\frac{\mu k}{c}$$

an, so erhalten wir alle ihre Wurzeln, wenn wir uns für μ die einzelnen Wurzeln der Multiplicatorgleichung und für c die entsprechenden der Modulargleichung gesetzt denken. Nun ist:

$$\sum \frac{\mu k}{c} = -f_1\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

wenn wir annehmen, dass die ursprüngliche Multiplicatorgleichung lautet:

$$\mu^{n+1} + f_1(k^2)\mu^n + \cdots f_n(k^2)\mu + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 0.$$

Dann aber folgt, dass der Grad von

$$f_1(k^2)$$

höchstens der $\frac{n-1}{2}$ten sein kann, wenn wir erwägen, dass in der Summe auf der linken Seite nur ein Glied vorkommt, welches unendlich gross wird und zwar dasjenige, welches zu $t = n$ gehört, dass ferner jenes Glied unendlich wird wie

$$q^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Dasselbe folgt für die anderen Coefficienten, so dass wir den Lehrsatz erhalten:

Lehrsatz: Der Grad der einzelnen Coefficienten der Multiplicatorgleichung, dieselben aufgefasst als ganze Functionen von k^2, ist höchstens gleich $\frac{n-1}{2}$.

Wir wollen jetzt untersuchen, in welche Werthe die Wurzeln der Multiplicatorgleichung übergehen, wenn statt des Moduls k^2 einer der transformirten Moduln c^2 gesetzt wird. Es sei die Transformation, zu welcher c^2 gehört, dargestellt durch das Symbol:

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t_1 \end{vmatrix},$$

dann giebt es immer eine zweite Transformation:

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 \\ 16x & t \end{vmatrix},$$

welche als transformirten Modul wieder k^2 ergiebt. Nun ist:

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}} \mu = t \frac{C}{K}$$

der zu der Transformation

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ 16\xi & t_1 \end{vmatrix}$$

gehörende Multiplicator, ferner:

$$(-1)^{\frac{t_1-1}{2}} M = t_1 \frac{K}{C}$$

der zu der Transformation

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 \\ 16x & t \end{vmatrix}$$

gehörende Multiplicator. Unter solchen Umständen folgt:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \mu M = n,$$

oder also wir erhalten den Werth:

$$M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}{\mu} \tag{7}$$

und damit den

Lehrsatz: Setzt man in der Multiplicatorgleichung an Stelle von $k^2 : c^2$ und an Stelle von $\mu : \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}{\mu}$, so bleibt die Gleichung richtig, und zwar hat die transformirte Gleichung eine und nur eine Lösung mit der ursprünglichen gemeinsam.

Es ist dieses Resultat schon darum von Interesse, weil durch Aufsuchen des grössten gemeinsamen Theilers sich für M ein rationaler Ausdruck durch k^2 und c^2 ergeben muss und andrerseits die Elimination von M eine Gleichung ergiebt, welche durch die Wurzeln der Modulargleichung befriedigt wird und deren Coefficienten sich rational durch k^2 ausdrücken lassen. Freilich gilt das ausgesprochene Resultat in Bezug auf M nur im allgemeinen Falle, es modificirt sich, wenn zwei Wurzeln der Modulargleichung einander gleich werden, wie später noch hervorgehoben werden wird. In besonders ausführlicher Weise ist auf diesen Punkt St. Smith eingegangen.

Mit Hülfe der q-Reihen lassen sich nun die Multiplicatorgleichungen in den einfachsten Fällen leicht herstellen. Im Falle $n=3$ hat sie die Form:

$$M^4 + a_0(1-2k^2) M^3 + a_1 M^2 + a_2(1-k^2) M - 3 = 0.$$

Für die noch unbestimmten Constanten erhalten wir die Werthe:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -6, \quad a_2 = 8,$$

so dass die Multiplicatorgleichung die Form annimmt:

$$M^4 - 6M^2 + 8(1-2k^2)M - 3 = 0. \tag{8}$$

Analog wird für $n = 5$:

$$M^6 - 10M^5 + 35M^4 - 60M^3 + 55M^2 + (256k^2[1-k^2]-26)M + 5 = 0. \tag{9}$$

§ 70.[31])

Differentialbeziehung zwischen dem Multiplicator, dem transformirten und dem ursprünglichen Modul. Ableitung einer Differentialgleichung, welcher Zähler und Nenner der Transformationsgleichungen Genüge leisten. Neue Bestimmung der Transformationscoefficienten.

Zwischen dem Multiplicator, dem ursprünglichen und dem transformirten Modul besteht eine Beziehung, welche sich von grosser Bedeutung gezeigt hat.

Wir haben seiner Zeit gefunden:

$$d\tau = -\frac{\pi}{2}\frac{dk}{k(1-k^2)K^2}, \tag{1}$$

$$d\tau' = -\frac{\pi}{2}\frac{dc}{c(1-c^2)C^2}, \tag{2}$$

so dass sich ergiebt:

$$\frac{d\tau'}{d\tau} = \frac{k(1-k^2)K^2}{c(1-c^2)C^2}\frac{dc}{dk}. \tag{3}$$

Da nun die Beziehung stattfindet:

$$(a_1\tau - b_1)\tau' = b_0 - a_0\tau,$$

so ergiebt sich zwischen dem ursprünglichen und dem transformirten Thetamodul die Gleichung:

$$(a_1\tau - b_1)d\tau' + a_1\tau' d\tau = \quad a_0 d\tau$$

oder also:

$$\frac{d\tau'}{d\tau} = -\frac{a_0 + a_1\tau'}{a_1\tau - b_1} = \frac{(a_0 + a_1\tau')^2}{n},$$

wenn wir die Relation berücksichtigen:

$$a_0 b_1 - b_0 a_1 = n.$$

Nun ist:

$$M^2 = \frac{C^2}{K^2}(a_0 + a_1\tau')^2.$$

Unter solchen Umständen können wir schreiben:

$$\frac{d\tau'}{d\tau} = \frac{K^2 M^2}{n C^2}$$

oder also wir erhalten die überaus wichtige Relation:

$$4) \qquad M^2 = \frac{nk(1-k^2)}{c(1-c^2)} \frac{dc}{dk}.$$

Wir hatten früher das Resultat gefunden, dass M sich rational durch k^2 und c^2 darstellen lässt, hier haben wir die Möglichkeit, M^2 unmittelbar mit Hülfe der Modulargleichung in der genannten Weise darzustellen.

Wir wollen hieran die Entwickelung einer weiteren Differentialbeziehung von Interesse anknüpfen. Bei Gelegenheit der Multiplicationstheorie ist gezeigt worden, dass eine Differentialgleichung aufgestellt werden kann, welcher Zähler und Nenner der Functionen $sn\,nu$, $cn\,nu$, $dn\,nu$ Genüge leisten. In der Transformationstheorie kann etwas Aehnliches gezeigt werden. Da die Betrachtungen denen bei Gelegenheit der Multiplication ganz analog sind, so begnügen wir uns im Wesentlichen damit, die Resultate anzugeben, und zwar wollen wir uns auf einen Repräsentanten beschränken, welcher dem Ausdruck:

$$\begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

entspricht.

Wir setzen:

$$5) \qquad V_0 = \frac{\vartheta_0(nv, n\tau)\,\vartheta_0^{n-1}}{\vartheta_0^n(v)}, \qquad 6) \quad V_1 = \frac{\vartheta_1(nv, n\tau)\,\vartheta_0^{n-1}}{\vartheta_0^n(v)},$$

so leisten diese Functionen der Differentialgleichung Genüge:

$$7) \; (1-2\alpha x^2+x^4)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2(n-1)(\alpha x - x^3)\frac{\partial V}{\partial x} + 4n(1-\alpha^2)\frac{\partial V}{\partial \alpha} + n(n\text{-}1).x^2.V = 0,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right),$$

$$x = \sqrt{k}\, sn u.$$

Setzen wir nun:

$$y = \sqrt{c}\, sn(u', c),$$

so hat y die Form:

$$y = \frac{V_0}{V_1}.$$

Dabei können wir setzen:

$$8) \qquad V_0 = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots a_{\frac{n-1}{2}} x^{n-1},$$

$$9) \qquad V_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(a_{\frac{n-1}{2}} x + a_{\frac{n-3}{2}} x^3 + \cdots a_1 x^{n-2} + a_0 x^n\right).$$

Mit Hülfe der Differentialgleichung ergiebt sich demnach die Recursionsformel:

$$10)\left\{\begin{aligned}&(2m+1)(2m+2)a_{m+1}+2m(n-2m)\left(u^4+\frac{1}{u^4}\right)a_m+\frac{n}{2}\frac{1-u^8}{u^3}\frac{da_m}{du}\\&\qquad+(n-2m+1)(n-2m+2)a_{m-1}=0.\end{aligned}\right.$$

Diese Beziehung kann nun dazu dienen, die Coefficienten in den Transformationsgleichungen wirklich zu berechnen.

In der That, der erste und letzte Coefficient sind unmittelbar bekannt. Es ist:

$$a_0=\frac{\theta_0}{\vartheta_0}=\sqrt{\frac{c'}{k'}}\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{M}{n}},$$

da

$$\frac{\theta_3^2}{\vartheta_3^2}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{M}{n}$$

ist.

Da überdies die Relation besteht:

$$M^2=n\frac{u}{v}\frac{1-u^8}{1-v^8}\frac{dv}{du},$$

so folgt:

$$11)\qquad a_0^4=\frac{c'^2}{k'^2}\frac{M^2}{n^2}=\frac{1}{n}\frac{u}{v}\frac{dv}{du};$$

es lässt sich also a_0^4 rational durch u und v unter Hinzunahme der Modulargleichung ausdrücken.

Ferner wird:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n\theta_1'}{\vartheta_0}=a_{\frac{n-1}{2}}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0},$$

also:

$$12)\qquad a_{\frac{n-1}{2}}=a_0M\sqrt{\frac{c}{k}}=\frac{v^2}{u^2}a_0M.$$

Es ist demnach $a_{\frac{n-1}{2}}$ unmittelbar bekannt, sobald a_0 gegeben ist, so zwar, dass der Quotient:

$$a_{\frac{n-1}{2}}:a_0$$

sich rational durch u und v ausdrücken lässt.

Wir können die Recursionsformel auch so schreiben:

$$13)\left\{\begin{aligned}&(2m+1)(2m+2)\frac{a_{m+1}}{a_m}+\frac{n}{8}\frac{1-u^8}{u^3}\,d\log\left(\frac{a_m}{a_0}\right)^4+(n-2m+1)(n-2m+2)\frac{a_{m-1}}{a_m}\\&\qquad+2m(n-2m)\left(u^4+\frac{1}{u^4}\right)+\frac{n}{8}\frac{1-u^8}{u^3}\frac{d\log a_0^4}{du}=0.\end{aligned}\right.$$

Diese Form zeigt dann unmittelbar die Richtigkeit des Lehrsatzes:

Lehrsatz: Die Quotienten der Transformationscoefficienten lassen sich rational durch u und v darstellen.

Als Beispiel wollen wir die Transformation dritten Grades wählen, so dass also $n = 3$ zu setzen ist.

Die Modulargleichung lautet:

$$v^4 + 2v^3u^3 - 2vu - u^4 = 0 = f(u, v).$$

Aus ihr folgt:

$$(1 - u^8)(1 - v^8) = (1 - u^2v^2)^4.$$

Nun ist:

$$a_0{}^4 = \frac{1}{3}\frac{u}{v}\frac{dv}{du} = -\frac{1}{3}\frac{f_1}{f_2},$$

$$f_1 = 3u^3v^3 - uv - 2u^4,$$

$$f_2 = 3u^3v^3 - uv + 2v^4.$$

Zwischen den beiden Grössen f_1 und f_2 besteht dabei die Beziehung:

$$f_1 f_2 = 3u^2v^2(1 - u^2v^2)^2.$$

Unter solchen Umständen können wir auch schreiben:

$$\text{14)} \qquad a_0{}^4 = \frac{(2u^3 + v)^2(1 - v^8)}{9v^2(1 - u^8)}.$$

Aehnlich einfach wird der einzige zu bestimmende Quotient von Transformationscoefficienten:

$$\text{15)} \qquad \frac{a_1}{a_0} = \frac{2u^3 + v}{v^3}u^2.$$

Damit sind wir für die Transformation dritten Grades vollkommen am Ziel.

§ 71.[32])

Die Entwickelung der Wurzeln der Modulargleichungen.

Nachdem wir die Existenz und die Haupteigenschaften der Modulargleichungen entwickelt haben, wollen wir jetzt in aller Kürze das Problem behandeln, ihre Wurzeln um die einzelnen Punkte der Ebene herum in Potenzreihen zu entwickeln.

Wir wollen zuerst den Punkt $u = 0$ betrachten.

Wir hatten seiner Zeit die Formel gefunden:

$$u = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}(1 - q + 2q^2 - 3q^3 + 4q^4 \ldots).$$

Hieraus folgt für die Wurzel:

$$v = \left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\tau) = \left(\frac{2}{n}\right)\sqrt[8]{q^n}(1 - q^n + 2q^{2n} - 3q^{3n} \ldots).$$

Nun ergiebt sich durch Umkehrung der ersten Potenzreihe, dass $\sqrt[8]{q}$ sich nach Potenzen von u entwickeln lässt, so dass wir für die genannte Wurzel v die Entwickelung erhalten:

$$1)\qquad v = A_0 u^n + A_1 u^{n+8} + A_2 u^{n+16} \ldots$$

Nehmen wir z. B. $n = 3$, so wird:

$$A_0 = -\frac{1}{2},\quad A_1 = -\frac{3}{2^5},\quad A_2 = -\frac{24}{2^9},\quad A_3 = -\frac{246}{2^{13}},\quad A_4 = -\frac{2832}{2^{17}},\ldots$$

Ebenso einfach ergiebt sich:

$$\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right) = \sqrt{2}\sqrt[8]{q^{\frac{1}{n}}}\left(1 - q^{\frac{1}{n}} + 2q^{\frac{2}{n}}\ldots\right)$$

oder also:

$$2)\qquad \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right) = B_0 u^{\frac{1}{n}} + B_1 u^{\frac{9}{n}} + B_2 u^{\frac{17}{n}} + \cdots$$

Die einfachsten Werthe der Grössen B werden:

$$B_0 = 2^{\frac{n-1}{2n}},\quad B_1 = -1.2^{\frac{n-9}{2n}},\quad B_2 = 2.2^{\frac{n-17}{2n}},\quad B_3 = -3.2^{\frac{n-25}{2n}},$$
$$B_4 = 4.2^{\frac{n-33}{2n}},\ldots$$

Die noch fehlenden Wurzeln ergeben sich dann in der Form:

$$3)\qquad \varphi\left(\frac{\tau + 16\xi}{n}\right) = B_0 \alpha^{\xi} u^{\frac{1}{n}} + B_1 \alpha^{9\xi} u^{\frac{9}{n}} + \cdots$$
$$\alpha = e^{\frac{16\pi i}{n}}.$$

Zu demselben Resultate wären wir gekommen, wenn wir als Ausgangspunkt die Formel gewählt hätten:

$$v = u^n \prod \frac{cn\,\frac{\nu\omega}{n}}{dn\,\frac{\nu\omega}{n}}.$$

In ähnlicher Weise ist die Entwickelung um die Punkte $u^8 = 1$ zu finden. Wir beschränken uns auf den Punkt $u = 1$. Wir hatten:

$$4)\quad \psi(\tau) = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} = 1 - 2q + 2q^2 - 4q^3 + 6q^4 - 8q^5 + 12q^6 - 16q^7\ldots,$$

ferner war die Beziehung gefunden worden:

$$5)\qquad \varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau).$$

Unter solchen Umständen können wir setzen:

$$6)\quad u = \varphi(\tau) = \frac{(1-p)(1-p^3)\dots}{(1+p)(1+p^3)\dots} = 1 - 2p + 2p^2 - 4p^3 + 6p^4\dots$$

$$p = e^{-\frac{\pi i}{\tau}}.$$

Hieraus folgt:

$$7)\quad \varphi(n\tau) = 1 + A_1(u-1)^{\frac{1}{n}} + A_2(u-1)^{\frac{2}{n}} + \cdots$$

In den einfachsten Fällen wird:

$$A_1 = 2^{\frac{n-1}{n}},\quad A_2 = 2^{\frac{n-2}{n}},\quad A_3 = 2 . 2^{\frac{n-3}{n}},\quad A_4 = 3 . 2^{\frac{n-4}{n}},\quad A_5 = 4 . 2^{\frac{n-5}{n}},\dots$$

Ferner ist:

$$\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right) = \psi\left(-\frac{n}{\tau}\right),$$

also folgt:

$$\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right) = 1 - 2p^n + 2p^{2n}\dots$$

oder wir erhalten die Entwickelung:

$$8)\quad \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right) = 1 + B_1(u-1)^n + B_2(u-1)^{n+1} + B_3(u-1)^{n+2} + \cdots$$

Die Entwickelung der noch fehlenden Wurzeln ist dann unmittelbar vermittelst der Relation herzustellen:

$$9)\quad \varphi\left(\frac{\tau + 16\xi}{n}\right) = \psi\left(\frac{-\frac{1}{\tau} + 16s}{n}\right).$$

Hiermit ist die Entwickelung um den Punkt $u = 1$ für eine jede Wurzel gegeben und es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die noch fehlenden Punkte $u^8 = 1$ genau so untersucht werden können. Indem wir aber die Punkte $u = 0$, $u^8 = 1$ in Betracht gezogen haben, sind zu gleicher Zeit die Hauptschwierigkeiten überwunden, die sich bei dem Problem der Wurzelentwickelung ergeben. In der That, wir hatten die Formel:

$$M^2 = \frac{nk(1-k^2)}{c(1-c^2)}\frac{dc}{dk}.$$

Diese Beziehung lehrt, dass $\frac{dc}{dk}$ oder auch $\frac{dv}{du}$, wenn wir von den Punkten $u = 0$ und $u^8 = 1$ absehen, im Endlichen weder Null noch unendlich werden kann. Wenn daher u_α irgend eine endliche Stelle in der Ebene ist, wenn ferner v_β irgend eine zu u_α gehörende Wurzel der Modulargleichung bedeutet, so folgt:

$$v - v_\beta = a_1(u - u_\alpha) + a_2(u - u_\alpha)^2 + \cdots$$

Von besonderer Bedeutung wird dieses Resultat für den Fall, dass zu einem Werthe u_α mehrere einander gleiche Werthe von v gehören, ein Fall, der im Folgenden genauer untersucht werden soll. Dabei zeigt sich das merkwürdige Resultat, auf welches hier schon hingewiesen werden möge, dass die Coefficienten a_1, die zu den gleichen Wurzeln gehören, von einander verschieden sein müssen. Das Resultat wird später als richtig nachgewiesen werden. Auch mit dieser Eigenschaft hat sich in ausführlicher Weise St. Smith beschäftigt.

Bei diesen Betrachtungen ist n wiederum als Primzahl angenommen. Von dem Unendlichkeitspunkt sehen wir ab.

§ 72.[35])

Die Discriminante der Modulargleichungen. Nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Wurzeln derselben.

Ausser den angegebenen Eigenschaften der Modulargleichungen sind nun noch eine ganze Reihe weiterer aufgestellt worden und zwar sowohl geometrischer wie auch analytischer Natur. In Bezug auf die ersteren möge vor Allem auf die genannten Arbeiten von Smith hingewiesen werden, in Bezug auf die letzteren wollen wir die Eigenschaften der Discriminante näher untersuchen und zwar auf Grund der Hermite'schen Arbeit über diesen Gegenstand. Auch hier wollen wir uns im Wesentlichen auf den Fall beschränken, dass n eine ungerade Primzahl ist. Aus den Reihenentwickelungen des vorigen Paragraphen und aus dem Satze, dass die Modulargleichung ungeändert bleibt, wenn an Stelle von $u : ue^{\frac{2\pi i s}{8}}$, an Stelle von $v : ve^{\frac{2 n \pi i s}{8}}$ gesetzt wird, folgt, dass wir die Discriminante ansetzen können:

$$1)\quad \prod (v_r - v_s)^2 = D = u^{n+1}(1-u^8)^{n+\varepsilon}(a_0 + a_1 u^8 + \cdots a_\nu u^{8\nu}).$$

Die Modulargleichung bleibt ferner ungeändert, wenn an Stelle von u und v resp. gesetzt wird $\frac{1}{u}$ und $\frac{1}{v}$. Nehmen wir hinzu, dass das Product aller Wurzeln gleich $\pm u^{n+1}$ ist, so folgt, dass die ganze Function:

$$a_0 + a_1 u^8 + \cdots a_\nu u^{8\nu}$$

eine reciproke Function ist; es folgt ferner, dass ihr Grad ist:

$$8\nu = 2(n^2-1) - 8(n+\varepsilon).$$

Hierbei ist ε gleich $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ gesetzt worden.

Mit Hülfe weniger Schlüsse lässt sich ferner zeigen, dass die Discriminante ein volles Quadrat ist. In der That, untersuchen wir den Ausdruck:

$$\frac{\prod (v_r - v_s)}{u^{\frac{n+1}{2}}},$$

so zeigt es sich, dass derselbe eine Modulfunction ist, welche für die Fundamental-Transformationen des ersten Falles der linearen Transformation ungeändert bleibt. Unter solchen Umständen muss derselbe sich rational durch u^8 darstellen lassen. Wir erhalten also den

Lehrsatz: Die Discriminante der Modulargleichung lässt sich in die Form bringen:

$$D = u^{n+1}(1 - u^8)^{n+\varepsilon}(b_0 + b_1 u^8 + \cdots b_\mu u^{8\mu})^2,$$

wobei μ den Werth hat:

$$\mu = \frac{n^2 - 1}{8} - \frac{n + \varepsilon}{2}$$

und $b_0 + b_1 u^8 + \cdots b_\mu u^{8\mu}$ eine reciproke Function bedeutet.

Wir wollen nun versuchen, die Wurzeln der Gleichung:

$$D = 0 \tag{2}$$

zu bestimmen und hierbei zunächst wenigstens annehmen, dass n eine beliebige ungerade Zahl ohne quadratischen Theiler ist. Es geschieht das, weil die Untersuchung für das allgemeine Problem sich nur wenig von den Untersuchungen für das specielle unterscheidet.

Zwei Wurzeln der entsprechenden Modulargleichung können geschrieben werden:

$$v_1 = \left(\frac{2}{\delta}\right) \varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right),$$

$$v_2 = \left(\frac{}{u}\right) \varphi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right),$$

$$\delta\delta_1 = uu_1 = n.$$

Nun haben wir bewiesen, dass die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür, dass zwei φ-Functionen von verschiedenen Argumenten:

$$\varphi(\tau_1) \quad \text{und} \quad \varphi(\tau_2),$$

abgesehen von achten Einheitswurzeln, einander gleich werden, lautet:

$$\tau_1 = \frac{b_0 - a_0\tau_2}{a_1\tau_2 - b_1},$$

wobei die Zahlen a_0, b_0, a_1, b_1 zum ersten Fall der linearen Transformation gehören und je nach der Wahl der achten Einheitswurzel verschiedene Bedingungen erfüllen. Diese Bedingungen, die aus früheren

Untersuchungen hervorgehen, werden später für den Fall zweier dieser achten Einheitswurzeln, nämlich ± 1, ausführlich aufgestellt werden. Setzen wir nun:

$$\tau_1 = \frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}, \quad \tau_2 = \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1},$$

so folgt als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung besteht:

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) = \left(\frac{2}{u}\right)\varphi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right),$$

die Existenz der Gleichung:

$$\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \frac{b_0 - a_0\dfrac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}}{a_1\dfrac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1},$$

wobei a_0, b_0, a_1, b_1 später noch aufzustellenden Bedingungen genügen müssen.

Wie wir sehen, erhalten wir auf diese Weise eine quadratische Gleichung in τ:

$$3) \qquad P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0,$$

deren eine Lösung mindestens die Eigenschaft hat, dass für die ihr entsprechende $\varphi(\tau)$-Function zwei Wurzeln der Modulargleichung einander gleich werden.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden, denen die Grössen P, Q, R genügen müssen, damit für die einer oder beiden Lösungen τ entsprechenden Functionen $\varphi(\tau)$ zwei Wurzeln der Modulargleichung, die zu einer rationalen Transformation n^{ten} Grades gehört, einander gleich werden, wobei, wie bemerkt, n wenigstens zunächst als unpaare Zahl ohne quadratischen Theiler angenommen wird.

Wir können die quadratische Gleichung mit der Unbekannten τ auch schreiben:

$$4) \qquad \alpha_1\tau^2 + (\alpha_0 - \beta_1)\tau - \beta_0 = 0,$$

wenn:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= u(a_0\delta_1 - 16\xi_1 a_1),\\
\alpha_1 &= a_1\delta u,\\
\beta_0 &= b_0\delta_1 u_1 + a_0\delta_1 16\xi_2 - b_1 u_1 16\xi_1 - a_1 16^2\xi_1\xi_2,\\
\beta_1 &= \delta(b_1 u_1 + 16\xi_2 a_1)
\end{aligned}$$

und daher:

$$\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = n$$

ist.

Die Discriminante dieser Gleichung hat die Form:

$$5)\quad \begin{cases} \Delta = (a+n)(a-n), \\ a = \dfrac{\alpha_0+\beta_1}{2}. \end{cases}$$

Nun muss wegen der Convergenz der ϑ-Functionen der reelle Theil von $\frac{\tau}{i}$ positiv sein. Daraus folgt unmittelbar, dass Δ negativ sein muss, ferner, dass nur diejenige der beiden Wurzeln τ gebraucht werden kann, für welche der Coefficient von i positiv ist.

Wir wollen zunächst das Verhalten von a in Bezug auf den Modul 16 untersuchen oder näher präcisirt zusehen, welche Werthe r in

$$a \equiv rn \mod 16$$

annehmen kann. Dazu ist es nöthig, die schon vorhin angedeuteten Bedingungen aufzustellen, denen die Grössen a_0, b_0, a_1, b_1 genügen. Dieselben lauten:

$$\text{I.}\ \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = +1.$$

1) $a_0 = 8A+1,\quad b_1 = 8B+1,\quad a_1 \equiv 0 \mod 2,\quad b_0 \equiv 0 \mod 16,$
$A + B \equiv 0 \mod 4.$

2) $a_0 = 8A+7,\quad b_1 = 8B+7,\quad a_1 \equiv 0 \mod 2,\quad b_0 \equiv 0 \mod 16,$
$A + B \equiv 2 \mod 4.$

3) $a_0 = 8A+3,\quad b_1 = 8B+3,\quad a_1 \equiv 0 \mod 4,\quad b_0 \equiv 8 \mod 16,$
$A + B \equiv 1 \mod 4.$

4) $a_0 = 8A+3,\quad b_1 = 8B+3,\quad a_1 \equiv 2 \mod 4,\quad b_0 \equiv 8 \mod 16,$
$A + B \equiv 3 \mod 4.$

5) $a_0 = 8A+5,\quad b_1 = 8B+5,\quad a_1 \equiv 0 \mod 4,\quad b_0 \equiv 8 \mod 16,$
$A + B \equiv 1 \mod 4.$

6) $a_0 = 8A+5,\quad b_1 = 8B+5,\quad a_1 \equiv 2 \mod 4,\quad b_0 \equiv 8 \mod 16,$
$A + B \equiv 3 \mod 4.$

$$\text{II.}\ \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = -1.$$

1) $a_0 = 8A+1,\quad b_1 = 8B+1,\quad a_1 \equiv 0 \mod 4,\quad b_0 \equiv 8 \mod 16,$
$A + B \equiv 0 \mod 4.$

2) $a_0 = 8A+1,\quad b_1 = 8B+1,\quad a_1 \equiv 2 \mod 4,\quad b_0 \equiv 8 \mod 16,$
$A + B \equiv 2 \mod 4.$

3) $a_0 = 8A + 7, \quad b_1 = 8B + 7, \quad a_1 \equiv 0 \; mod\, 4, \quad b_0 \equiv 8 \; mod\, 16,$
$A + B \equiv 2 \; mod\, 4.$

4) $a_0 = 8A + 7, \quad b_1 = 8B + 7, \quad a_1 \equiv 2 \; mod\, 4, \quad b_0 \equiv 8 \; mod\, 16,$
$A + B \equiv 0 \; mod\, 4.$

5) $a_0 = 8A + 3, \quad b_1 = 8B + 3, \quad a_1 \equiv 0 \; mod\, 2, \quad b_0 \equiv 0 \; mod\, 16,$
$A + B \equiv 1 \; mod\, 4.$

6) $a_0 = 8A + 5, \quad b_1 = 8B + 5, \quad a_1 = 0 \; mod\, 2, \quad b_0 \equiv 0 \; mod\, 16,$
$A + B \equiv 1 \; mod\, 4.$

Man findet diese Bedingungen unmittelbar aus der Tabelle für die lineare Transformation der $\varphi(\tau)$-Function. Es ist nun:

$$2a = \alpha_0 + \beta_1 = u(a_0\delta_1 - 16\xi_1 a_1) + \delta(b_1 u_1 + 16\xi_2 a_1),$$

d. h.

$$2a \equiv u a_0 \delta_1 + u_1 b_1 \delta \; mod\, 32.$$

a_0 und b_1 haben die Formen $8A + s$, $8B + s$, so dass wir erhalten:

$$u a_0 \delta_1 + u_1 b_1 \delta \equiv 8(u\delta_1 A + u_1 \delta B) + s(u\delta_1 + u_1\delta) \; mod\, 32.$$

Wir untersuchen zunächst:

$$u\delta_1 + \delta u_1 \equiv 2rn \; mod\, 32.$$

Es ergeben sich hierbei folgende Fälle:

$$\text{I.} \; \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = 1.$$

1) $u = 8p_0 + l, \quad u_1 = 8p_1 + l_1, \quad \delta = 8p_2 + l, \quad \delta_1 = 8p_3 + l_1,$
$r = +1.$

2) $u = 8p_0 + l, \quad u_1 = 8p_1 + l_1, \quad \delta = 8p_2 - l, \quad \delta_1 = 8p_3 - l_1,$
$r = -1.$

$$\text{II.} \; \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = -1.$$

1) $u = 8p_0 + l, \quad u_1 = 8p_1 + l_1, \quad \delta = 8p_2 + l_1, \quad \delta_1 = 8p_3 + l,$
$r = \pm 9$, je nachdem $l \mp l_1 \equiv 0 \; mod\, 4$.

2) $u = 8p_0 + l, \quad u_1 = 8p_1 + l_1, \quad \delta = 8p_2 - l_1, \quad \delta_1 = 8p_3 - l,$
$r = \mp 9$, je nachdem $l \mp l_1 \equiv 0 \; mod\, 4$.

3) $u = 8p_0 + l, \quad u_1 = 8p_1 + l, \quad \delta = 8p_2 + l_1, \quad \delta_1 = 8p_3 + l_1,$
$r = \pm 9$, je nachdem $l \mp l_1 \equiv 0 \; mod\, 4$.

4) $u = 8p_0 + l, \quad u_1 = 8p_1 - l, \quad \delta = 8p_2 + l_1, \quad \delta_1 = 8p_3 - l_1,$
$r = \pm 9$, je nachdem $l \mp l_1 \equiv 0 \; mod\, 4$.

Weitere Fälle sind nicht möglich. Die Richtigkeit der Behauptung folgt aus einer näher eingehenden Rechnung. Wir zeigen die Art derselben an dem Falle II, 2. Für diesen ist die Congruenz aufzulösen:

$$(8p_0 + l)(8p_3 - l) + (8p_1 + l_1)(8p_2 - l_1) \equiv r u u_1 + r\delta\delta_1 \; mod\, 32$$

oder:

$$8[(p_3 - p_0) - r(p_1 - p_2)](l - l_1) - (l + l_1)^2 - 2(r-1) l l_1 \equiv 0 \; mod\, 32.$$

Sei nun:

$$l - l_1 \equiv 0 \; mod\, 4,$$

mithin:

$$l + l_1 \equiv 2 \; mod\, 4,$$

so folgt daraus unmittelbar als einzige Lösung:

$$r = -9.$$

Wir können die soeben gefundenen Resultate übersichtlicher darstellen. Sei:

$$u = 8p_0 + l, \quad \delta = 8p_2 + l_1,$$

so ist, wenn:

$$\text{I.} \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = +1,$$

$$r = \mp 1, \quad \text{je nachdem} \quad l \pm l_1 \equiv 0 \; mod\, 4,$$

wenn:

$$\text{II.} \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = -1,$$

$$r = \mp 9, \quad \text{je nachdem} \quad l \pm l_1 \equiv 0 \; mod\, 4.$$

Untersuchen wir jetzt die Congruenz:

$$2a \equiv 2rn \; mod\, 32,$$

so ergiebt sich vermöge Rechnungen genau derselben Art für die vorhin aufgestellten Fälle resp.:

I.

1) $a \equiv \mp n \; mod\, 16$, 2) $a \equiv \pm n \; mod\, 16$,

3) $a \equiv \pm 9n \; mod\, 16$, 4) $a \equiv \pm n \; mod\, 16$,

5) $a \equiv \pm 9n \; mod\, 16$, 6) $a \equiv \mp n \; mod\, 16$.

II.

1) $a \equiv \mp 9n \; mod\, 16$, 2) $a \equiv \mp n \; mod\, 16$,

3) $a \equiv \pm 9n \; mod\, 16$, 4) $a \equiv \pm n \; mod\, 16$,

5) $a \equiv \pm n \; mod\, 16$, 6) $a \equiv \mp n \; mod\, 16$.

Dabei ist in allen zwölf Fällen das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, je nachdem

$$l \pm l_1 \equiv 0 \; mod\, 4$$

ist.

Wie wir sehen, zeigt sich das merkwürdige Resultat, dass

$$a \equiv \pm n \; mod \, 8$$

sein muss. Je nachdem nun:

$$a \equiv \pm 9n \; mod \, 16$$

oder:

$$a \equiv \pm \; n \; mod \, 16$$

ist, nimmt die Determinante eine der beiden Formen an:

$$6) \qquad \begin{cases} \Delta = 16(3n - 8\nu)(n - 2\nu), \\ \Delta' = -32\nu(n - 8\nu). \end{cases}$$

Also finden wir: Damit eine Lösung von

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

unseren früher aufgestellten Bedingungen genüge, ist eine nothwendige Bedingung, dass die Determinante der Gleichung sich in eine der beiden Formen bringen lässt:

$$\Delta = Q^2 - PR = 16(3n - 8\nu)(n - 2\nu)$$

oder:

$$\Delta' = Q^2 - PR = -32\nu(n - 8\nu)$$

und negativ ist.

Es fragt sich jetzt, welchen weiteren Bedingungen die Coefficienten genügen müssen.

Es ergab sich für τ die Gleichung:

$$\alpha_1\tau^2 + (\alpha_0 - \beta_1)\tau - \beta_0 = 0$$

oder auch:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0,$$

wobei die Coefficienten vorhin angegebene Werthe besitzen. Sei zunächst:

$$\Delta = 16(3n - 8\nu)(n - 2\nu),$$

so zeigt die früher aufgestellte Tabelle, dass in allen diesen Fällen:

$$a_1 \equiv 0 \; mod \, 4, \quad b_0 \equiv 8 \; mod \, 16$$

ist, mithin auch:

$$P \equiv 0 \; mod \, 4, \quad R \equiv 8 \; mod \, 16.$$

Es bleibt übrig, Q zu betrachten, und zwar untersuchen wir es nach dem Modul 8. Es ist:

$$2Q \equiv u a_0 \delta_1 - u_1 b_1 \delta \; mod \, 16 \equiv u a_0 \frac{n}{\delta} - \delta b_1 \frac{n}{u} mod \, 16 \equiv \frac{n}{\delta u}(u^2 a_0 - \delta^2 b_1) \; mod \, 16.$$

Die Rechnung zeigt nun, dass:

$$u^2 a_0 - \delta^2 b_1$$

in allen möglichen vorkommenden Fällen congruent ist:

$$u^2 a_0 - \delta^2 b_1 \equiv 8 \; mod \, 16.$$

Wir zeigen die Art derselben an einem Beispiele und wählen dazu den Fall:

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = -1,$$

$$a_0 = 8A + 1; \quad b_1 = 8B + 1; \quad a_1 \equiv 0 \; mod\, 4; \quad b_0 \equiv 8 \; mod\, 16.$$

Für diesen Fall wird:

$$u^2 a_0 - \delta^2 b_1 \equiv 8(l^2 A + l_1^2 B) + l^2 - l_1^2 \equiv l^2 - l_1^2 \; mod\, 16 \equiv 8 \; mod\, 16.$$

Hieraus folgt nun, dass sein muss:

$$2Q \equiv 8 \; mod\, 16.$$

Aehnliche Resultate ergeben sich für:

$$\Delta' = -32\nu(n - 8\nu).$$

Man hat hierfür zwei Fälle zu unterscheiden, wie aus den aufgestellten Tabellen unmittelbar ersichtlich ist:

a) $P \equiv 2 \; mod\, 4, \quad Q \equiv 4 \; mod\, 8, \quad R \equiv 8 \; mod\, 16,$

b) $P \equiv 0 \; mod\, 2, \quad Q \equiv 0 \; mod\, 8, \quad R \equiv 0 \; mod\, 16.$

Fassen wir die letzten Betrachtungen zusammen, so ergiebt sich:

Die nothwendigen Bedingungen, damit zu einer Lösung τ von:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

eine Function $\varphi(\tau)$ gehöre, die Wurzel der Gleichung:

$$D = 0$$

ist, sind:

1. Die Determinante der Gleichung muss sich in eine der beiden Formen:

$$\Delta = 16(3n - 8\nu)(n - 2\nu),$$

$$\Delta' = -32\nu(n - 8\nu)$$

bringen lassen und negativ sein.

2. Falls:

$$\Delta = 16(3n - 8\nu)(n - 2\nu)$$

ist, muss sein:

$$P \equiv 0 \; mod\, 4, \quad Q \equiv 4 \; mod\, 8, \quad R \equiv 8 \; mod\, 16;$$

falls:

$$\Delta' = -32\nu(n - 8\nu)$$

ist, muss sein:

$$P \equiv 2 \; mod\, 4, \quad Q \equiv 4 \; mod\, 8, \quad R \equiv 8 \; mod\, 16$$

oder:

$$P \equiv 0 \; mod\, 2, \quad Q \equiv 0 \; mod\, 8, \quad R \equiv 0 \; mod\, 16.$$

Wir zeigen, dass diese aufgestellten Bedingungen auch die hinreichenden sind.

Dazu muss bewiesen werden, dass, falls sie gelten, $a_0, b_0, a_1, b_1, u, u_1, \delta, \delta_1, \xi_1, \xi_2$ so bestimmt werden können, dass allen Bedingungen

Genüge geleistet wird. Bei diesem Beweise wollen wir nun die alte Annahme machen, dass n eine ungerade Primzahl ist, ferner wollen wir annehmen, dass P durch n nicht theilbar sei, indem wir bemerken, dass der entgegengesetzte Fall in analoger Weise zu erledigen ist.

Wir fanden zunächst:

$$P = a_1 \delta u.$$

Hieraus folgt $\delta = u = 1$, $\delta_1 = n$, $u_1 = n$, so dass wir durch sofortige Specialisirung der früheren Gleichungen die folgenden erhalten:

$$P = a_1,$$
$$2Q = a_0 n - 16\xi_1 a_1 - (b_1 n + 16\xi_2 a_1),$$
$$R = 16^2 \xi_1 \xi_2 a_1 + n(16\xi_1 b_1 - 16\xi_2 a_0) - b_0 n^2,$$
$$a_0 b_1 - b_0 a_1 = 1.$$

Setzen wir:

$$Q^2 - PR = \Delta,$$

so ergeben sich für a_0 und b_1 die Gleichungen:

$$n^2 a_0^2 - 2n a_0 (Q + 16\xi_1 P) = \Delta + n^2 - (Q + 16\xi_1 P)^2,$$
$$n^2 b_1^2 + 2n b_1 (Q + 16\xi_2 P) = \Delta + n^2 - (Q + 16\xi_2 P)^2,$$

mithin, da:

$$n^2 + \Delta = a^2,$$
$$n a_0 = Q + 16\xi_1 P \pm a,$$
$$n b_1 = -(Q + 16\xi_2 P) \pm a.$$

Um a_0 und b_1 als ganze Zahlen zu bestimmen, muss den Congruenzen Genüge geleistet werden:

$$Q + 16\xi_1 P \pm a \equiv 0 \bmod n,$$
$$Q + 16\xi_2 P \mp a \equiv 0 \bmod n.$$

Wir erhalten aus diesem Gleichungssystem nur ein Werthepaar ξ_1, ξ_2, da die Reihenfolge gleichgültig ist, und daraus folgt unmittelbar, dass wir uns auf ein Zeichen von a beschränken können.

Zu dem gefundenen Werthepaare ξ_1, ξ_2 gehört dann ein bestimmtes Werthepaar a_0, b_1; a_1 war schon bestimmt. Dass b_0 als ganze Zahl berechnet werden kann, folgt aus der Gleichung:

$$b_0 = \frac{1 - a_0 b_1}{a_1},$$

nachdem wir uns in dieselbe die erhaltenen Werthe von a_0 und b_1 eingesetzt denken. Somit sind alle Grössen bestimmt, und zwar zeigt es sich, dass zu der vorgelegten Gleichung jedenfalls nur ein Paar gleicher Wurzeln gehören kann.

Es ist nun nicht schwer nachzuweisen, dass die Grössen a_0, b_0, a_1, b_1 auch den übrigen aufgestellten Bedingungen genügen. Wir beschränken uns darauf, den Beweis in einem Falle zu liefern.

Es sei:

$$\Delta = 16(3n - 8\nu)(n - 2\nu),$$

also:

$$P \equiv 0 \; mod\, 4, \quad Q \equiv 4 \; mod\, 8, \quad R \equiv 8 \; mod\, 16;$$

ferner nehmen wir:

$$a \equiv -9n \; mod\, 16.$$

Es war gefunden worden:

$$na_0 = Q + 16\xi_1 P + a,$$

$$nb_1 = -Q - 16\xi_2 P + a.$$

Hieraus folgt:

$$n(a_0 - 7) \equiv 4 \; mod\, 8, \quad n(b_1 - 7) \equiv 4 \; mod\, 8.$$

Mithin erhalten wir:

$$a_0 = 8A + 3, \quad b_1 = 8B + 3.$$

Ferner folgt:

$$n(a_0 + b_1) \equiv -18n \; mod\, 32,$$

oder also:

$$A + B \equiv 1 \; mod\, 4.$$

Da $P = a_1$, so ist:

$$a_1 \equiv 0 \; mod\, 4,$$

während b_0 aus der Gleichung:

$$R = 16^2 \xi_1 \xi_2 a_1 + 16\xi_1 n b_1 - 16\xi_2 n a_0 - n^2 b_0$$

sich in der Form ergiebt:

$$b_0 \equiv 8 \; mod\, 16.$$

Das sind aber gerade die gewünschten Resultate.

Wir sehen also, dass die nothwendigen Bedingungen auch die hinreichenden sind. Wir wollen nun alle die zuletzt gewonnenen Resultate in einer etwas modificirten Weise zusammenfassen in den folgenden:

Lehrsatz: Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit zu einer Wurzel von:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

eine Function $\varphi(\tau)$ gehöre, die Lösung der Gleichung:

$$D = 0$$

ist, lauten:

1. Die Determinante der quadratischen Gleichung muss sich in eine der beiden Formen:

$$\Delta = (3n - 8\nu)(n - 2\nu)$$

oder:

$$\Delta' = -8\nu(n - 8\nu)$$

bringen lassen und negativ sein.

2. Falls
$$\varDelta = (3n - 8\nu)(n - 2\nu)$$
ist, muss sein:
$$P \equiv 1 \bmod 1, \quad Q \equiv 1 \bmod 2, \quad R \equiv 2 \bmod 4,$$
falls
$$\varDelta' = -8\nu(n - 8\nu),$$
muss sein:
$$P \equiv 1 \bmod 2, \quad Q \equiv 2 \bmod 4, \quad R \equiv 4 \bmod 8$$
oder:
$$P \equiv 0 \bmod 1, \quad Q \equiv 0 \bmod 4, \quad R \equiv 0 \bmod 8.$$

Zu gleicher Zeit folgt, dass einem jeden Werthe τ immer ein und nur ein Paar gleicher Wurzeln der Modulargleichung entspricht.

Mit Hülfe dieser Resultate ist es möglich, sämmtliche Gleichungen:
$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$
aufzustellen, deren Lösungen die Argumente der von einander verschiedenen Lösungen $u = \varphi(\tau)$ der Discriminantengleichung:
$$D = 0$$
sind. Die Lösungen $u = 0$, $u = e^{\frac{2si\pi}{8}}$ sind nicht in Betracht zu ziehen, wir können ferner, da:
$$D = u^{n+1}(1 - u^8)^{n+\varepsilon}(b_0 + b_1 u^8 + \cdots b_\mu u^{8\mu})^2$$
war, uns darauf beschränken, sämmtliche Gleichungen:
$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$
aufzustellen, deren Lösungen von einander verschiedene Werthe von $\varphi(\tau)^8$ ergeben.

Zunächst lassen sich aus Bedingung 1) für jedes n unmittelbar alle nur möglichen Determinanten ableiten. Dieses sei geschehen, dann greifen wir eine beliebige derselben, die wir mit $\varDelta$ bezeichnen wollen, heraus. Sämmtliche quadratische Formen, die zu der Determinante $\varDelta$ gehören, zerfallen in eine gewisse Anzahl von Classen, deren jede wir uns durch eine reducirte Form repräsentirt denken können. Diese reducirten Formen sind nach bekannten Methoden aufzustellen und mögen wirklich aufgestellt sein. Greifen wir eine beliebige derselben heraus, so fragt es sich, giebt es sichere Kriterien zu unterscheiden, ob in der zugehörigen Classe Formen enthalten sind, deren Coefficienten auch der zweiten Bedingung genügen. Wir müssen dazu die einzelnen Fälle der möglichen Determinanten unterscheiden. Sei:
$$\text{I.} \quad -\varDelta = (8\nu - 3n)(n - 2\nu)$$
und zwar:

1) $$-\varDelta \equiv 1 \bmod 4.$$

Alsdann sind für die Coefficienten der zu der Determinante Δ gehörenden quadratischen Formen überhaupt folgende Fälle möglich:

$$a)\quad P \equiv 1 \; mod\, 2, \quad Q \equiv 0 \; mod\, 2, \quad R \equiv 1 \; mod\, 2.$$

Wenden wir dann auf die Form (P, Q, R) eine lineare Transformation des vierten Falles an, so geht dieselbe über in die Form (P', Q', R'), wobei:

$$P' = Pb_1^2 + 2Qb_1a_1 + Ra_1^2,$$
$$Q' = Pb_0b_1 + Q(b_0a_1 + a_0b_1) + Ra_0a_1,$$
$$R' = Pb_0^2 + 2Qb_0a_0 + Ra_0^2,$$

und a_0, b_0, a_1, b_1 jene linearen Transformationszahlen bedeuten, die der Bedingung genügen:

$$a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \; mod\, 2.$$

Wie wir sehen, ist jetzt:

$$P' \equiv 1 \; mod\, 2, \quad Q' \equiv 1 \; mod\, 2, \quad R' \equiv 2 \; mod\, 4,$$

d. h. wir sind durch eine lineare Transformation auf eine Form gekommen, deren Coefficienten der Bedingung 2) genügen, d. h. in Classen dieser Art existiren stets Formen der verlangten Art.

$$b)\quad P \equiv 0 \; mod\, 2, \quad Q \equiv 1 \; mod\, 2, \quad R \equiv 1 \; mod\, 2.$$

In diesem Falle wenden wir auf die Form (P, Q, R) eine lineare Transformation des zweiten Falles an, um wieder zu einer Form (P', Q', R') zu gelangen, deren Coefficienten allen früher aufgestellten Bedingungen genügen.

$$c)\quad P \equiv 1 \; mod\, 2, \quad Q \equiv 1 \; mod\, 2, \quad R = 2 \; mod\, 4.$$

Diese Coefficienten haben schon die gewünschte Form. Da weitere Fälle nicht möglich sind, so finden wir: In sämmtlichen Classen, die zu einer Determinante der Form:

$$\Delta \equiv 3 \; mod\, 4$$

gehören, giebt es Formen, deren Coefficienten der Bedingung 2) und damit allen aufgestellten Bedingungen genügen.

In ähnlicher Weise sind alle übrigen Determinanten zu untersuchen. Die Resultate werden später angegeben werden. Dieselben liefern einfache Kriterien, welche der reducirten Formen bei einer jeden der möglichen Determinanten beizubehalten, welche zu verwerfen sind.

Seien alle beizubehaltenden reducirten Formen sämmtlicher überhaupt möglicher Determinanten hingeschrieben, so fragt sich schliesslich noch, wieviel Formen in der zu einer jeden derselben gehörenden Classe sich befinden, die den angegebenen Bedingungen genügen und überdies von einander verschiedene Werthe von $\varphi(\tau)^8$ ergeben.

Die Coefficienten der reducirten Formen können entweder den aufgestellten Bedingungen genügen oder nicht. Im ersteren Falle behalten wir sie als Repräsentanten bei, im letzteren wählen wir dazu diejenige Form, die aus der reducirten durch eine möglichst einfache lineare Transformation entstanden ist und den genannten Bedingungen genügt. Diese Transformationen zerfallen in sechs Fälle. Zunächst ist klar, dass diejenigen Formen, welche durch eine Transformation des ersten Falles aus den obigen Repräsentanten abgeleitet sind, stets dieselben Werthe von $\varphi(\tau)^8$ ergeben, da die ihnen entsprechenden $\varphi(\tau)$-Functionen sich von einander nur um achte Einheitswurzeln unterscheiden.

Die anderen fünf Fälle müssen bei den einzelnen Arten von Determinanten gesondert betrachtet werden.

Hierbei ist eine Bemerkung wesentlich. Wenn man von einer allen Bedingungen genügenden Form:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

ausgehend, eine lineare Transformation des 2.,... 6. Falles anwendet, so kann man hierbei sehr wohl zu derselben Form zurückgelangen. Diese Fälle bilden eine Ausnahme und müssen gesondert betrachtet werden.

Bekanntlich ergeben sich die Substitutionen, welche eine quadratische Form in sich selbst überführen, aus den Lösungen der Gleichung:

$$t^2 - \Delta u^2 = \sigma^2,$$

wenn σ der grösste gemeinsame Theiler der drei Coefficienten $P, 2Q, R$ ist und Δ die Determinante der Form bedeutet. In unserem Falle ist dieselbe negativ. Dann giebt es aber im Allgemeinen nur zwei Auflösungen der obigen Gleichung:

$$t = \sigma, \quad u = 0, \quad t = -\sigma, \quad u = 0.$$

Die zu beiden Fällen gehörenden Transformationszahlen sind:

$$a_0 = \pm 1, \quad b_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \pm 1,$$

gehören also zur linearen Transformation des ersten Falles und sind nicht weiter zu berücksichtigen.

Eine Ausnahme bilden die Fälle:

$$-\Delta = \sigma^2 \quad \text{und} \quad -4\Delta = 3\sigma^2.$$

Dieselben sollen später behandelt werden und mögen einstweilen unberücksichtigt bleiben.

Sei nun unter dieser Einschränkung:

$$\text{I. } \Delta = (3n - 8\nu)(n - 2\nu)$$

und zwar:

1) $$\Delta \equiv 3 \; mod\, 4.$$

Wenden wir dann auf die repräsentirenden Formen Substitutionen des zweiten, vierten, fünften und sechsten Falles an, so kommt man nicht mehr zu Formen, die allen Bedingungen genügen, vielmehr geschieht dieses nur und stets durch Substitutionen des dritten Falles. Hieraus folgt:

In jeder Classe einer Determinante der Form $\Delta \equiv 3 \mod 4$ giebt es zwar unendlich viele Formen, die allen Bedingungen genügen, jedoch liefern dieselben nur zwei von einander verschiedene Werthe von $\varphi(\tau)^8$.

Wir brauchen daher auch nur zwei Formen in Betracht zu ziehen, z. B. die repräsentirende und eine zweite, die aus ihr durch eine lineare Transformation des dritten Falles entstanden ist.

In ähnlicher Weise sind sämmtliche übrigen Determinanten zu behandeln.

Schliesst man $\Delta = -\sigma^2$ und $4\Delta = -3\sigma^2$ aus, so ergeben sich Resultate, die wir mit den früheren in folgenden Sätzen zusammenfassen können.

Sei I. $\Delta = (3n - 8\nu)(n - 2\nu)$. Wenn $\Delta \equiv 3 \mod 4$ ist, so liefert eine jede Classe je zwei Formen der verlangten Art. Wenn $\Delta \equiv 1 \mod 4$ ist, so liefern nur die uneigentlich primitiven Classen Formen der verlangten Art und zwar, wenn $\Delta \equiv 1 \mod 8$ ist, deren zwei, wenn $\Delta \equiv 5 \mod 8$, deren sechs.

Sei II. $\Delta = 8\nu(8\nu - n)$. Wenn ν ungerade ist, so sind alle diejenigen Classen auszuschliessen, in welchen die Coefficienten durch zwei theilbar sind, alle anderen liefern zwei Formen. Wenn ν gerade ist, so sind in sämmtlichen Classen Formen der verlangten Art enthalten, und zwar mit zwei Ausnahmen zwei. Diese zwei Ausnahmen, in denen sich sechs Formen ergeben, werden von den Classen gebildet, in welchen die Coefficienten der vorkommenden Formen durch acht theilbar sind oder die nach Fortlassung eines allen Coefficienten gemeinsamen Theilers uneigentlich primitiv werden.

Dabei genügt es, in jeder Classe die repräsentirende Form aufzustellen. In denjenigen Classen nämlich, in denen zwei Formen der verlangten Art existiren, wird die zweite aus der repräsentirenden durch eine lineare Transformation des dritten Falles gefunden, in denjenigen Classen ferner, in denen sechs Formen der verlangten Art existiren, werden die fünf anderen durch eine lineare Transformation des zweiten, dritten, ... sechsten Falles aus der repräsentirenden abgeleitet.

Es bleibt übrig, die Determinanten $-\sigma^2$ und $-\frac{3}{4}\sigma^2$ zu betrachten.

Sei zunächst $\varDelta = -\sigma^2$, und zwar $\equiv 3 \mod 4$. Es giebt nur eine Classe der Determinante $-\sigma^2$, in welcher die Coefficienten sämmtlicher Formen den Theiler σ haben. Die einzige reducirte Form derselben ist:

$$\sigma\tau^2 + \sigma^2 = 0.$$

Dieselbe kann nicht zum Repräsentanten gewählt werden, da ihre Coefficienten nicht allen Bedingungen genügen. Wir wählen daher eine andere Form zu demselben, und zwar:

$$\sigma\tau^2 - 2\sigma\tau + 2\sigma = 0.$$

Dieselbe wird durch vier Transformationen in sich selbst übergeführt. Die beiden ersten sind schon betrachtet und als zum ersten Fall gehörend befunden worden. Die beiden anderen werden von den Zahlen gebildet:

$$a_0 = -1,\quad b_0 = -2,\quad a_1 = 1,\quad b_1 = 1,$$
$$a_0 = 1,\quad b_0 = 2,\quad a_1 = -1,\quad b_1 = -1.$$

Dieselben gehören zum dritten Fall, so dass in der zu der Form:

$$\sigma\tau^2 - 2\sigma\tau + 2\sigma = 0$$

gehörenden Classe nur diese einzige Form existirt, welche allen Bedingungen genügt, vorausgesetzt, dass σ eine ungerade Zahl ist.

Dasselbe Resultat findet statt, wenn:

$$-\varDelta \equiv \sigma^2 \equiv 16 \mod 64$$

ist.

Ist dagegen: $$-\varDelta \equiv \sigma^2 \equiv 0 \mod 64,$$

so giebt es in der einzigen Classe, deren Coefficienten durch σ theilbar sind, drei Formen, die allen Bedingungen genügen, nämlich u. a.:

$$\sigma\tau^2 + \sigma = 0,\quad 2\sigma\tau^2 + 2\sigma\tau + \sigma = 0,\quad \sigma\tau^2 - 2\sigma\tau + 2\sigma = 0.$$

Sei jetzt: $$4\varDelta = -3\sigma^2.$$

Alsdann giebt es in der einzigen zu dieser Determinante gehörenden uneigentlich primitiven Classe, in welcher die Coefficienten sämmtlicher Formen durch σ theilbar sind, nur zwei Formen, welche allen Bedingungen genügen, und zwar können die Formen gewählt werden:

$$\sigma\tau^2 + \sigma\tau + \sigma = 0,\quad \sigma\tau^2 - \sigma\tau + \sigma = 0.$$

Hiermit ist die Untersuchung abgeschlossen. Die gefundenen Sätze liefern eine einfache Methode, sämmtliche Gleichungen:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

aufzustellen, deren Lösungen die Argumente der von einander verschiedenen Wurzeln der Discriminantengleichung ergeben. Seien alle diese

Gleichungen aufgestellt, so schliesst sich hieran die Aufgabe, zu entscheiden, wie vielfach eine jede dieser Wurzeln ist.

Um dieses Problem zu lösen, stellen wir die folgende Untersuchung an. Die Modulargleichung möge bezeichnet werden durch:

$$F(u, v) = 0,$$

ferner setzen wir:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f_1(u, v), \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f_2(u, v).$$

Die Beziehung zwischen dem Multiplicator, dem ursprünglichen und dem transformirten Modul, kann dann auch geschrieben werden:

$$M^2 = -\frac{nu}{v} \frac{(1-u^8)}{(1-v^8)} \frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}.$$

In diesen Ausdruck wollen wir der Reihe nach alle Wurzeln der Modulargleichung einsetzen. Da das Product der entsprechenden Werthe von $M: \pm n$ ist, so ergiebt sich:

$$n^2 = \frac{n^{n+1} u^{n+1} (1-u^8)^{n+1}}{\prod v(1-v^8)} \frac{\prod f_1(u, v)}{\prod f_2(u, v)}.$$

Nun ist aber:

$$\prod v = \varepsilon u^{n+1}$$

und ähnlich:

$$\prod (1-v^8) = (1-u^8)^{n+1},$$

mithin wird:

$$\prod f_2(u, v) = \varepsilon . n^{n-1} \prod f_1(u, v).$$

Die linke Seite ist vom Zeichen abgesehen die Discriminante. Daraus folgt, dass wir die Discriminante auch erhalten können, indem wir v aus den Gleichungen eliminiren:

$$F(u, v) = 0, \quad f_1(u, v) = 0.$$

Wir wollen nun an Stelle von $v : \varepsilon u$, von $u : v$ setzen, so wird die Modulargleichung ungeändert bleiben, $f_1(u, v) = 0$ übergehen in $f_2(u, v) = 0$. Setzt man daher in der Discriminantengleichung an Stelle von $u : v$, so stellt dieselbe die Eliminationsgleichung von

$$F(u, v) = 0, \quad f_2(u, v) = 0$$

dar, welche sich durch Elimination von u ergiebt. Hieraus folgt, dass die Wurzeln der Discriminantengleichung mit den Werthen der gleichen Wurzeln der Modulargleichung zusammenfallen.

Nun sind für eine jede Wurzel der Discriminantengleichung, die Wurzeln $u = 0$ und $u^8 = 1$ ausgeschlossen, immer je zwei und nur zwei

Wurzeln der Modulargleichung einander gleich. Hieraus folgt, dass die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung:

$$D = 0$$

mit Ausnahme der Wurzeln $u = 0$ und $u^8 = 1$ von der Ordnungszahl 2 sein müssen, so dass damit das Problem, die Discriminantengleichung aufzulösen, vollständig zu Ende geführt ist.

Wir wollen nun in den einfachsten Fällen die Discriminante wirklich aufstellen, resp. die Gleichungen, deren Wurzeln zu den Wurzeln der Gleichung:

$$D = 0$$

gehören. Es brauchen hierzu nur die repräsentirenden Formen aufgestellt zu werden. Wir treffen die Wahl in folgender Weise. Genügt eine reducirte Form nicht sämmtlichen Bedingungen in Betreff ihrer Coefficienten, so thut es entweder die Form:

$$(R, -Q, P) \quad \text{oder} \quad (P, -P+Q, P-2Q+R).$$

Setzen wir daher:

$$(R, -Q, P) = (P, Q, R)_1, \quad (P, -P+Q, P-2Q+R) = (P, Q, R)_2,$$

so können wir immer eine der drei Formen:

$$(P, Q, R), \quad (P, Q, R)_1, \quad (P, Q, R)_2$$

zum Repräsentanten wählen, wie wir es thun wollen.

Wir haben ferner zwei Kategorien von Determinanten unterschieden. Wir wollen durch Σ resp. Σ' die Zahl der Gleichungen bezeichnen, die zu der ersten resp. zweiten Kategorie von Determinanten gehören und von einander verschiedene Werthe von $\varphi(\tau)^8$ ergeben, endlich durch ν die Grösse $\Sigma + \Sigma'$ bezeichnen. Dann wird für $n = 3$ die Discriminante die Form annehmen:

$$D = u^4(1 - u^8)^2.$$

Für $n = 5$ erhalten wir:

$$D = u^6(1 - u^8)^4(1 + u^8)^2;$$

die einzige in Betracht kommende Form lautet:

$$(1, 0, 1)_2.$$

Für $n = 7$ erhalten wir:

$$D = u^8(1 - u^8)^8(1 - u^8 + u^{16})^2.$$

Die allein in Betracht kommende Determinante ist -3.

Für $n = 11$ ergeben sich die Determinanten $\Delta = -7$ und $\Delta' = -24$ mit den Formen:

$$(2, 1, 4)_1, \quad (1, 0, 24), \quad (3, 0, 8), \quad (4, 2, 7)_1, \quad (5, 1, 5)_2.$$

Für die höheren Primzahlen 13, 17, 19, 23 fassen wir die Resultate in einer Tabelle zusammen.

n			ν
13	$\Delta = -3$ $(2, 1, 2)$ $\Delta = -9$ $(1, 0, 9)_2$, $(2, 1, 5)_1$ $(3, 0, 3)_2$ $\Sigma = 7$	$-\Delta' = 40$ $(1, 0, 40)$, $(5, 0, 8)$, $(4, 2, 11)_1$, $(7, 3, 7)_2$ $\Sigma' = 8$	15
17	$-\Delta = 13$ $(1, 0, 13)_2$, $(2, 1, 7)_1$ $\Delta = 15$ $(2, 1, 8)_1$, $(4, 1, 4)_2$ $\Sigma = 8$	$-\Delta' = 72$ $(1, 0, 72)$ $(3, 0, 24)$ $(8, 0, 9)_1$ $(4, 2, 19)_1$ $(9, 3, 9)_2$ $(8, 4, 11)_1$ $-\Delta' = 16$ $(1, 0, 16)$ $(2, 0, 8)$ $(4, 2, 5)_1$ $(4, 0, 4)_2$ $\Sigma' = 19$	27
19	$-\Delta = 15$ $(2, 1, 8)_1$ $(4, 1, 4)_2$ $-\Delta = 21$ $(1, 0, 21)_2$ $(3, 0, 7)_2$ $(2, 1, 11)_2$ $(5, 2, 5)_2$ $\Sigma = 12$	$-\Delta' = 88$ $(1, 0, 88)$ $(8, 0, 11)_1$ $(4, 2, 23)_1$ $(8, 4, 13)_1$ $-\Delta' = 48$ $(1, 0, 48)$ $(2, 0, 24)$ $(3, 0, 16)$ $(4, 0, 12)$ $(6, 0, 8)$ $(7, 1, 7)_2$ $(4, 2, 13)_1$ $(8, 4, 8)$ $\Sigma' = 24$	36
23	$-\Delta = 19$ $(2, 1, 0)$ $-\Delta = 33$ $(1, 0, 33)_2$ $(3, 0, 11)_2$ $(2, 1, 17)_1$ $(6, 3, 7)_1$ $-\Delta = 15$ $(2, 1, 8)_1$ $(4, 1, 4)_2$ $\Sigma = 18$	$-\Delta' = 112$ $(1, 0, 112)$ $(2, 0, 56)$ $(4, 0, 28)_2$ $(8, 0, 14)_1$ $(7, 0, 16)$ $(4, 2, 29)_1$ $(11, 3, 11)_2$ $(8, 4, 16)$ $-\Delta' = 120$ $(1, 0, 120)$ $(3, 0, 40)$ $(5, 0, 24)$ $(8, 0, 15)_1$ $(11, 1, 11)_2$ $(4, 2, 31)$ $(8, 4, 17)_1$ $(12, 6, 13)_1$ $\Sigma' = 36.$	54

In ähnlicher Weise könnten wir weitere Primzahlen behandeln.

§ 73.[34])

Definition allgemeiner Transformationsgleichungen nach Weber.

Wir haben im Vorhergehenden gewisse algebraische Gleichungen untersucht und zwar auf Grund der Theorie der Modulfunctionen. Hierbei hat es sich gezeigt, dass die Wurzeln derselben in engem Zusammenhang mit den Wurzeln der Theilungsgleichungen stehen. Unter Zugrundelegung der letzteren und zwar für die Nullwerthe der Argumente können die Betrachtungen wesentlich verallgemeinert werden.

Setzen wir:

$$1)\qquad x_{\mu,\mu'} = sn\frac{4\mu K + 4\mu' iK'}{n}$$

und lassen μ und μ' ein vollständiges Restesystem nach dem Modul n durchlaufen, so erhalten wir n^2 von einander verschiedene Werthe, welche Wurzeln der algebraischen Gleichung:

$$2)\qquad xB(x^2) = 0$$

sind. Dieselben sind also jedenfalls algebraische Functionen von k^2. Hierbei wollen wir der Einfachheit halber wieder annehmen, dass n eine ungerade Primzahl sei. Es folgt dann aus den früheren Formeln, dass die Grössen:

$$3)\qquad \begin{cases} y_{\mu,\mu'} = cn\left(\dfrac{4\mu K + 4\mu' iK'}{n}\right), \\ z_{\mu,\mu'} = dn\left(\dfrac{4\mu K + 4\mu' iK'}{n}\right) \end{cases}$$

sich rational durch $x_{\mu,\mu'}$ ausdrücken lassen, wobei die Coefficienten rational durch k^2 darstellbar sind. Es folgt das aus den Formeln:

$$y = \frac{A(x^2)}{C(x^2)}, \quad z = \frac{A(x^2)}{D(x^2)}.$$

Aus den Wurzeln x^2 der Gleichung $B(x^2) = 0$ lassen sich die Wurzeln von

$$A(x^2) = 0, \quad C(x^2) = 0, \quad D(x^2) = 0$$

rational ableiten. Ist nämlich x^2 eine Wurzel von $B(x^2) = 0$, so sind:

$$\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}, \quad \frac{1-k^2x^2}{1-x^2}, \quad \frac{1}{k^2x^2}$$

Wurzeln von resp.:

$$C(x^2) = 0, \quad D(x^2) = 0, \quad A(x^2) = 0.$$

Jedenfalls folgt, dass eine jede rationale Function der Grössen $x_{\mu,\mu'}$ eine eindeutige Function von τ und eine algebraische Function von k^2

ist. Wir wollen nun zusehen, welche Aenderungen eintreten, wenn an Stelle von τ gesetzt wird:

$$\tau' = \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1},$$

wobei die Zahlen a_0, b_0, a_1, b_1 Zahlen des ersten Falles sind. Führen wir Thetafunctionen ein, so können wir setzen:

$$x_{\mu,\mu'} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{2\mu + 2\mu'\tau}{n}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{2\mu + 2\mu'\tau}{n}\right)}.$$

Setzen wir nun an Stelle von τ die vorhin definirte Grösse τ', so ist das gleichbedeutend damit, als ob auf die Function:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}$$

die Transformation:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

ausgeübt wird, vorausgesetzt, dass unter v die Grösse verstanden wird:

$$v = \frac{2\mu b_1 - 2\mu' b_0 + (-2\mu a_1 + 2\mu' a_0)\tau}{n}.$$

Unter solchen Umständen geht $x_{\mu,\mu'}$ über in:

$$(-1)^{\frac{a_0-1}{2}} x_{\nu,\nu'},$$

vorausgesetzt, dass die Gleichungen bestehen:

$$\nu = \mu b_1 - \mu' b_0,$$
$$\nu' = -\mu a_1 + \mu' a_0.$$

Ist $a_0 \equiv 3 \; mod \, 4$, so können wir auch sagen, $x_{\mu,\mu'}$ geht über in $x_{-\nu,-\nu'}$. Dabei ist klar, dass hierbei die sämmtlichen Zahlen $a_0, b_0, a_1, b_1, \mu, \mu', \nu, \nu'$, soweit es sich um die Bestimmung von $x_{\nu,\nu'}$ handelt, nur nach dem Modul n zu nehmen sind. Von diesem Gesichtspunkte aus leisten die Zahlen a_0, b_0, a_1, b_1 lediglich der Congruenz Genüge:

$$a_0 b_1 - b_0 a_1 \equiv 1 \; mod \, n.$$

Wir wollen nun von der Wurzel $x_{0,0}$ absehen, die übrigen Wurzeln lassen sich in folgender Weise in Reihen ordnen. Man wähle nach Belieben eine der Wurzeln:

$$4) \qquad x_{\mu_1,\mu_1'} = sn\left(\frac{4\mu_1 K + 4\mu_1' i K'}{n}\right) = sn\,\Omega_1.$$

Unter den übrigen Wurzeln kommen dann die Grössen vor:

$$(R_1) \qquad sn\, h\, \Omega_1,$$

wobei h etwa die Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ durchläuft. Dieselben sind alle von einander verschieden. Wir wollen das System R_1 die erste Reihe der Wurzeln nennen. Ist nun Ω_2 eine in R_1 nicht enthaltene Wurzel, so bilden die $n-1$ Grössen:

$$(R_2) \qquad sn\, h\, \Omega_2,$$

welche sowohl unter einander, als von den Wurzeln R_1 verschieden sind, eine zweite Reihe. Auf diese Weise kann man fortfahren, bis sämmtliche Grössen $x_{\mu,\mu'}$ in $n+1$ Reihen von je $n-1$ Gliedern geordnet sind. Nach dem Multiplicationstheorem lässt sich durch eine Wurzel jede andere Wurzel derselben Reihe rational ausdrücken in der Form:

$$5) \qquad sn\, h\, \Omega = f_h(sn\, \Omega),$$

worin f_h eine von dem Multiplicator h, aber nicht von der Wahl von Ω abhängige rationale Function ihres Argumentes ist. Wenn nun die beiden Wurzeln $x_{\mu,\mu'}, x_{\nu,\nu'}$ in dieselbe Reihe gehören, so muss sich die Zahl h so bestimmen lassen, dass

$$h\mu \equiv \nu, \quad h\mu' \equiv \nu' \bmod n$$

ist und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so gehören beide Wurzeln in dieselbe Reihe.

Aus den beiden Congruenzen folgt:

$$\mu\nu' - \nu\mu' \equiv 0 \bmod n$$

und umgekehrt lassen sich aus dieser die obigen Congruenzen ableiten. In der That, μ, μ', n sind relativ prim. Unter solchen Umständen kann man die Zahlen α, β so bestimmen, dass:

$$\alpha\mu - \beta\mu' \equiv 1 \bmod n$$

ist.

Aus den aufgestellten Congruenzen folgt:

$$\nu \equiv (\alpha\nu - \beta\nu')\mu, \quad \nu' \equiv (\alpha\nu - \beta\nu')\mu' \bmod n;$$

wir erhalten also, wenn

$$a\nu - \beta\nu' = h$$

gesetzt wird, in der That die früheren Congruenzen.

Die Congruenz:

$$6) \qquad \mu\nu' - \nu\mu' \equiv 0 \bmod n$$

ist also die hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass die beiden Wurzeln $x_{\mu,\mu'}$ und $x_{\nu,\nu'}$ derselben Reihe angehören.

Hieraus folgt, dass die Eintheilung in Reihen gänzlich unabhängig ist von der Wahl der Grössen Ω.

Es folgt aber weiter, dass, wenn wir an Stelle von $\tau : \tau'$ setzen, die Reihen nicht aus einander gerissen werden, sondern dass lediglich

die Glieder der einzelnen Reihen unter einander vertauscht werden, wobei freilich zunächst von dem Vorzeichen derselben abgesehen werden muss.

Bezeichnen wir diejenige Reihe, in welcher $x_{\mu,\mu'}$ vorkommt, durch $R_{\mu,\mu}$, so lässt sich eine rationale Function der Wurzeln einer solchen Reihe, etwa der Reihe $R_{1,0}$, rational durch eine dieser Wurzeln darstellen.

Wenn diese Function die Eigenschaft hat, ungeändert zu bleiben, falls diese eine Wurzel durch eine andere derselben Reihe ersetzt wird, wenn also beispielsweise ξ eine symmetrische Function der Wurzeln einer Reihe ist, so fallen die Zeichenschwierigkeiten fort und ξ erhält durch Anwendung aller linearen Transformationen des ersten Falles $n+1$ Werthe:

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n+1}.$$

Sind diese $n+1$ Werthe alle von einander verschieden, so leisten die Grössen ξ dann einer Gleichung vom $n+1^{\text{ten}}$ Grade Genüge, deren Coefficienten sich rational durch k^2 darstellen lassen. Es fragt sich noch, welche Constanten in den Coefficienten auftreten können. Erwägen wir, dass wir zur Berechnung der Coefficienten die q-Reihen einführen können und nehmen an, dass in ξ nur rationale Zahlencoefficienten vorkommen, so folgt ähnlich wie bei den Modulargleichungen, dass die Zahlencoefficienten in unseren Gleichungen auch ihrerseits rationale Zahlen sein müssen.

Ebenso einfach folgt die Irreductibilität unserer Gleichungen, die wir Transformationsgleichungen nennen.

Weber greift nun unter allen möglichen Transformationsgleichungen zwei besondere Gruppen heraus. Aus jeder der Reihen, in welche wir die Wurzeln der Theilungsgleichungen geordnet haben, nehmen wir für:

$$\Omega_{\mu\mu'} = \frac{4\mu K + 4\mu' iK'}{n}$$

einen Repräsentanten $\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_{n+1}$ und erhalten die $n-1$ Grössen einer Reihe, wenn wir in $sn\, m\Omega$ m ein vollständiges System incongruenter zu n relativ primer Zahlen durchlaufen lassen. Die einfachsten Ausdrücke, welche als Wurzeln von Transformationsgleichungen eingeführt werden können, sind die Producte:

$$\prod \Phi(sn\, h\,\Omega),$$

die nach h von $h=1$ bis $h=n-1$ zu nehmen sind und in denen Φ eine beliebige rationale Function ihres Argumentes bedeutet. Eine jede solche Function ist durch $sn\,\Omega$ rational ausdrückbar und bleibt offenbar ungeändert, wenn Ω durch irgend ein $m\Omega$ ersetzt wird. Wird also die Function Φ nur so gewählt, dass die $n+1$ Werthe unseres

Productes, die den $n+1$ Reihen der Wurzeln der Theilungsgleichung entsprechen, von einander verschieden sind, so ist der Ausdruck, den wir hingeschrieben haben, Wurzel einer Transformationsgleichung.

Wir wollen nun zwei Fälle unterscheiden. Die Function $\Phi(x)$ kann gerade oder ungerade sein.

Erster Fall. Es sei $\Phi(x)$ eine gerade Function, so sind unter den Factoren unseres Productes je zwei, nämlich:

$$\Phi[sn(h\Omega)] \quad \text{und} \quad \Phi[sn(n-h)\Omega] \text{ einander gleich.}$$

Ist daher m irgend eine zu n relativ prime Zahl, so folgt:

$$\prod \Phi[sn(hm\Omega)] = \prod \Phi(sn\,h\,\Omega),$$

wobei das Product links und rechts nach h zu nehmen ist und zwar von $h=1$ bis $h=\frac{n-1}{2}\cdot$

Setzen wir daher:

$$V = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \Phi[sn(h\Omega)],$$

so ist V Wurzel einer Transformationsgleichung. Wir nennen eine solche eine Modulargleichung.

Ist $\Phi(x)$ eine ungerade Function, so sind die beiden Grössen:

$$\Phi[sn(h\Omega)] \quad \text{und} \quad \Phi[sn(n-h)\Omega]$$

entgegengesetzt und daher:

$$\prod \Phi(snhm\,\Omega) = \pm \prod \Phi(snh\,\Omega),$$

wobei wiederum das Product links und rechts nach h zu nehmen ist und zwar von $h=1$ bis $h=\frac{n-1}{2}\cdot$

Unter solchen Umständen können wir im Allgemeinen nur schliessen, dass das Quadrat unserer Function Wurzel einer Transformationsgleichung ist. Wir nennen dieselbe eine Multiplicatorgleichung.

§ 74.

Besondere Transformationsgleichungen. Anderweite Darstellung der Wurzeln derselben.

Wir wollen nun einige specielle Kategorien von Transformationsgleichungen aufstellen.

Wir setzen dazu:

$$
1)\quad \begin{cases} \Omega = \dfrac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n} = 4K\tau_1, \\[2ex] \tau_1 = \dfrac{\mu + \mu'\tau}{n} \end{cases}
$$

und betrachten die Producte:

$$
\prod \vartheta_\alpha(2h\tau_1),
$$

in denen α die vier Werthe $0, 1, 2, 3$ annehmen kann, während das Product nach h zu nehmen ist und zwar von $h = 1$ bis $h = \frac{n-1}{2}$. Man kommt dann zu besonders einfachen Resultaten, wenn man setzt:

$$
2)\quad \begin{cases} P_\alpha . \vartheta_\alpha^{\frac{n-1}{2}} = f . \prod \vartheta_\alpha(2h\tau_1), & \alpha = 0, 2, 3 \\[2ex] P_1 . \eta(\tau)^{\frac{n-1}{2}} = f . \prod \vartheta_1(2h\tau_1), & \end{cases}
$$

wobei η die früher definirte Function bedeutet, und ferner gesetzt ist:

$$
f = e^{\frac{\pi i}{6}\mu'(\mu + \mu'\tau)\frac{n^2-1}{n}}.
$$

Zwischen den drei Grössen P_0, P_2, P_3 besteht dann die Beziehung:

$$
3)\quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\, 2^{\frac{n-1}{2}}\, P_0 . P_2 . P_3 = 1.
$$

Die eingeführten Grössen P lassen sich durch die Wurzeln der Theilungsgleichung ausdrücken. In der That, bildet man die Quotienten:

$$
\frac{P_3^2}{P_0 . P_2}, \quad \frac{P_2^2}{P_0 . P_3}, \quad \frac{P_0^2}{P_2 . P_3}, \quad \frac{P_1^3}{P_0 . P_2 . P_3}
$$

und nimmt die zuletzt hingeschriebene Relation hinzu, so folgt:

$$
4)\quad \begin{cases} \varepsilon . P_3^3 = \prod \dfrac{dn^2 h\Omega}{cn\, h\Omega}, \\[2ex] \varepsilon . P_2^3 = \prod \dfrac{cn^2 h\Omega}{dn\, h\Omega}, \\[2ex] \varepsilon . P_0^3 = \prod \dfrac{1}{cn\, h\Omega . dn\, h\Omega}, \\[2ex] \varepsilon' . P_1^3 = (kk')^{\frac{n-1}{2}} \prod \dfrac{sn^3 h\Omega}{cn\, h\Omega . dn\, h\Omega}, \\[2ex] \varepsilon = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\, 2^{\frac{n-1}{2}}, \quad \varepsilon' = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}. \end{cases}
$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass P_3^3, P_2^3, P_0^3 Wurzeln von Modulargleichungen, P_1^6 dagegen Wurzeln von Multiplicatorgleichungen sind, wobei die Producte von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ zu nehmen sind.

Es sind dieses nicht die einzigen Transformationsgleichungen, die mit Hülfe der Grössen P gebildet werden können. Unter den sonst noch möglichen führen wir die folgenden an:

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{P_2}{P_3} = \prod \dfrac{cn\, h\Omega}{dn\, h\Omega}, \\ \dfrac{P_0}{P_3} = \prod \dfrac{1}{dn\, h\Omega}, \end{cases}$$

$$6)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \dfrac{2^{\frac{n-1}{3}} P_3^2 . P_1}{(kk')^{\frac{n-1}{6}}} = \prod \dfrac{sn\, h\Omega . dn\, h\Omega}{cn\, h\Omega}, \\ (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \dfrac{2^{\frac{n-1}{3}} P_2^2 . P_1}{(kk')^{\frac{n-1}{6}}} = \prod \dfrac{sn\, h\Omega . cn\, h\Omega}{dn\, h\Omega}, \\ (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \dfrac{2^{\frac{n-1}{3}} P_0^2 . P_1}{(kk')^{\frac{n-1}{6}}} = \prod \dfrac{sn\, h\Omega}{cn\, h\Omega . dn\, h\Omega}. \end{cases}$$

Die ersten Ausdrücke sind Wurzeln von Modulargleichungen, die Quadrate des letzten Wurzeln von Multiplicatorgleichungen, und zwar sind wir hierbei zu den von uns ausführlich behandelten Modular- und Multiplicatorgleichungen gekommen.

In ähnlicher Weise könnte es weiter gehen, indessen würde es den Rahmen dieses Werkes überschreiten, wollten wir hierauf näher eingehen. Wir verweisen in Bezug hierauf auf die Originalarbeiten von Kiepert, Klein etc. und das mehrfach citirte Werk von Weber. In diesen Publicationen werden eine Fülle weiterer Transformationsgleichungen ausführlich discutirt, die sich in manchen Beziehungen vor den von uns als Typen behandelten durch gewisse einfache Eigenschaften auszeichnen. Im Princip zeigen sich aber keine Unterschiede, insbesondere ist es bisher nicht möglich geworden, für alle Transformationsgrade derartige Gleichungen oder überhaupt Beziehungen zwischen ursprünglichen und transformirten Grössen herzustellen. Da es aber gerade als eine der wichtigsten Aufgaben dieses Werkes bezeichnet werden darf, eine hierauf bezügliche Methode zu entwickeln, die von den bisher betrachteten wesentlich verschieden ist, so brechen wir hier ab, indem wir nur noch zeigen, dass die eingeführten Functionen P in einfachster Beziehung zu den Hermite'schen Functionen stehen. Wenn wir nämlich zunächst eine der Reihen ins Auge fassen, in welche wir die Wurzeln der Theilungsgleichung gebracht haben, und zwar diejenige, zu welcher die

Wurzel $x_{1,0}$ gehört, so folgt unmittelbar, wenn wir noch die diesem speciellen Fall entsprechenden Functionen P durch P^0 bezeichnen:

$$7) \quad \begin{cases} P_3^0 = \dfrac{f(n\tau)}{f(\tau)^n}, \\ P_0^0 = \dfrac{f_1(n\tau)}{f(\tau)}, \\ P_2^0 = \left(\dfrac{2}{n}\right)\dfrac{f_2(n\tau)}{f(\tau)^n}, \\ P_1^0 = \sqrt{n}\,\dfrac{\eta(n\tau)}{\eta(\tau)}. \end{cases}$$

Kennen wir aber eine Wurzel unserer Transformationsgleichung, so kennen wir bei Anwendung der ausführlich angegebenen Methoden, die sich vor Allem auf die lineare Transformation stützen, alle übrigen. Wir erhalten dann unsere repräsentirenden Functionen oder doch eng damit zusammenhängende. Da die fertigen Formeln für diese Betrachtungen gegeben worden sind, wollen wir hier abbrechen.

§ 75.[35])

Allgemeinere Fassung des speciellen Transformationsproblemes.

Es hat sich gezeigt, dass die Transformationstheorie in zwei gesonderte Theile zerfällt. Erstens handelt es sich darum, die allgemeinen transformirten Functionen durch die ursprünglichen darzustellen, sodann darum, Beziehungen zwischen den Constanten aufzufinden. Es gipfelte die letzte Theorie in der Definition der allgemeinen Transformationsgleichungen und den Methoden zur Aufstellung derselben. Hierbei können wir auch die Beziehungen, die wir in den §§ 59, 60 und 61 gefunden haben, als Transformationsgleichungen bezeichnen, und zwar als irrationale. Wie aber bemerkt, ist man auf den angegebenen Wegen noch nicht im Stande gewesen, für allgemeine Transformationsgrade Gleichungen, sei es rationaler oder irrationaler Form, zu entwickeln — auch muss es als fraglich erscheinen, ob die angegebenen Wege die naturgemässen sind, die zu derartigen Relationen führen können. Wir wollen versuchen, die Fragestellung anders, zum Theil allgemeiner zu geben und damit eine neue Auffassung der speciellen Transformationstheorie zu entwickeln. Wir stellen zunächst die Frage so: Es sollen die möglichst allgemeinen Relationen zwischen den ursprünglichen und transformirten Functionen aufgestellt werden, wobei die Formen sowohl rational, als auch irrational sein können, wobei ferner eine oder mehrere transformirte Grössen in den

Relationen vorkommen können. Gewissermassen als Einleitung und als einfachste Beispiele für diese allgemeinere Anschauungsweise mögen die folgenden Betrachtungen dienen.

Verstehen wir — immer bei ungeradem n, welches überdies der Einfachheit halber als Primzahl angenommen werden möge — unter

$$\vartheta_0(v', \tau')$$

eine repräsentirende Thetafunction für die Transformation n^{ten} Grades, so wird:

$$1)\qquad \vartheta_0(v', \tau') = \sum c_l \,.\, \vartheta_0^{n-2l}(v) \,.\, \vartheta_\alpha^{2l}(v),$$

wobei die Summe nach l von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ zu nehmen ist und α die Werthe 1, 2, 3 annehmen kann.

Daneben sind dann durch Substitution halber Perioden die entsprechenden Formeln für die übrigen Thetafunctionen aufzustellen. Nun kann man aber eins der Glieder auf der rechten Seite durch eine andere repräsentirende Function ersetzen:

$$\vartheta_0(v'', \tau''),$$

so dass man eine Gleichung erhält:

$$2)\qquad \vartheta_0(v', \tau') = c\,\vartheta_0(v'', \tau'') + \sum{}' c_l \,.\, \vartheta_0^{n-2l}(v) \,.\, \vartheta_\alpha^{2l}(v),$$

wobei die Summe auf der rechten Seite über dieselben Verbindungen zu nehmen ist wie vorhin mit Ausnahme einer einzigen und zwar beliebigen. Dieses ist dadurch angedeutet, dass die Summe mit einem Strich versehen ist. Man erhält bei festen Repräsentanten $\frac{n+1}{2}$ solcher Darstellungen und, wenn man halbe Perioden substituirt, $2(n+1)$ Gleichungen mit $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ Unbekannten. Wir können die erste dieser Gleichungen auch schreiben:

$$3)\qquad \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v)} = c\,\frac{\vartheta_0(v'', \tau'')}{\vartheta_0^n(v)} + \sum{}' c_l' \, sn^{2l}(u).$$

Wir denken uns nun beide Seiten dieser und der drei durch Substitution halber Perioden gewonnenen Gleichungen nach Potenzen von u entwickelt, wobei die Entwickelungscoefficienten der Grössen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v', \tau')}{\vartheta_\alpha^n(v)} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_\alpha(v'', \tau'')}{\vartheta_\alpha^n(v)}$$

mit Ausnahme der constanten Glieder als unbekannt anzunehmen sind. Man erhält dann eine unendliche Anzahl von Gleichungen, mit deren

Hülfe erstens die Coefficienten c bestimmt werden können, zweitens aber eine unendliche Anzahl von Gleichungen zwischen den Grössen

$$\vartheta_\alpha(0, \tau'), \quad \vartheta_\alpha(0, \tau'') \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3$$

hergestellt werden können. Diese Beziehungen sind dann derartige allgemeinere Transformationsgleichungen, auf welche am Anfange dieses Paragraphen hingewiesen wurde.

In ähnlicher Weise kann man in der Gleichung:

$$\vartheta_0(v', \tau') = \sum c_l \vartheta_0^{n-2l}(v) \vartheta_\alpha^{2l}(v)$$

2, 3 etc. Producte durch transformirte Thetafunctionen ersetzen. Führt man so viele repräsentirende Functionen in die Summe ein, dass nur ein einziges Product stehen bleibt, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$4) \qquad \vartheta_0^{n-2l}(v) \vartheta_\alpha^{2l}(v) = \sum c_r \,.\, \vartheta_0(v^{(r)}, \tau^{(r)}).$$

Führt man endlich lauter Repräsentanten ein, so erhält man lineare Beziehungen zwischen einer Reihe repräsentirender Functionen, auf welche noch näher eingegangen werden wird. Dann können in diesen Gleichungen durch Reihenentwickelungen erstens die Constanten bestimmt werden, zweitens aber unendlich viele Beziehungen zwischen ursprünglichen und transformirten Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente hergestellt werden, wobei die Zahl der repräsentirenden vorkommenden Thetafunctionen im Allgemeinen grösser als 2 ist. Derartige allgemeine Beziehungen sind es, um deren Aufstellung es sich handelt.

Als Beispiele wollen wir die Fälle $n = 3$ und $n = 5$ in kurze Untersuchung ziehen.

Für den Fall $n = 3$ erhalten wir die Gleichungen:

$$5) \qquad \begin{cases} \vartheta_0(3v, 3\tau) + c_0 \vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = c_1 \vartheta_0^3(v, \tau), \\ \vartheta_3(3v, 3\tau) + c_0 \vartheta_3\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = c_1 \vartheta_3^3(v, \tau), \\ \vartheta_1(3v, 3\tau) - c_0 \vartheta_1\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = - c_1 \vartheta_1^3(v, \tau), \\ \vartheta_2(3v, 3\tau) + c_0 \vartheta_2\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = c_1 \vartheta_2^3(v, \tau). \end{cases}$$

Wir können das Gleichungssystem schreiben:

$$6)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\vartheta_0(3v,3\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} + c_0\frac{\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = c_1,\\
&\frac{\vartheta_3(3v,3\tau)}{\vartheta_0(3v,3\tau)}\,\frac{\vartheta_0(3v,3\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} + c_0\frac{\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}{\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}\,\frac{\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = c_1\frac{\vartheta_3^3(v,\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)},\\
&\frac{\vartheta_1(3v,3\tau)}{\vartheta_0(3v,3\tau)}\,\frac{\vartheta_0(3v,3\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} - c_0\frac{\vartheta_1\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}{\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}\,\frac{\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = -c_1\frac{\vartheta_1^3(v,\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)},\\
&\frac{\vartheta_2(3v,3\tau)}{\vartheta_0(3v,3\tau)}\,\frac{\vartheta_0(3v,3\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} + c_0\frac{\vartheta_2\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}{\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}\,\frac{\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = c_1\frac{\vartheta_2^3(v,\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)}.
\end{aligned}\right.$$

Führen wir elliptische Functionen ein, machen den Ansatz:

$$\frac{\vartheta_0(3v,3\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = y_0 + y_2u^2 + y_4u^4 + \cdots,$$

$$\frac{\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = y_0' + y_2'u^2 + y_4'u^4 + \cdots,$$

$$\vartheta_\alpha(0,3\tau) = \theta_\alpha,$$

$$\vartheta_\alpha\left(0,\frac{\tau}{3}\right) = \theta_\alpha',$$

entwickeln links und rechts nach Potenzen von u und setzen die Coefficienten von $u^0, u^1, u^2, \ldots$ links und rechts einander gleich, so erhalten wir:

$$7)\qquad y_0 + c_0y_0' = c_1,$$

$$8)\qquad \frac{\theta_3}{\theta_0}y_0 + c_0\frac{\theta_3'}{\theta_0'}y_0' = c_1\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_0^3},$$

$$9)\qquad \frac{3\theta_2\theta_3}{\vartheta_3^2}y_0 - c_0\frac{\theta_2'\theta_3'}{\vartheta_3^2}y_0' = 0,$$

$$10)\qquad \frac{\theta_2}{\theta_0}y_0 + c_0\frac{\theta_2'}{\theta_0'}y_0' = c_1\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_0^3},$$

$$11)\qquad y_2 + c_0y_2' = 0,$$

$$12)\qquad \frac{\theta_3}{\theta_0}y_2 - \frac{9\vartheta_2^4\theta_3^5}{2\vartheta_3^8.\theta_0}y_0 + c_0\frac{\theta_3'}{\theta_0'}y_2' - c_0\frac{\vartheta_2^4\theta_3'^5}{2\vartheta_3^8.\theta_0'}y_0' = -\frac{3c_1}{2}\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_0^3.\vartheta_3},$$

$$13)\quad \frac{3\theta_2\theta_3}{\vartheta_3^{\,2}}y_2+\frac{9\theta_2\theta_3^{\,5}(\vartheta_2^{\,4}+\vartheta_3^{\,4})}{2\vartheta_3^{\,10}}y_0+c_0\frac{\theta_2'\theta_3'}{\vartheta_3^{\,2}}y_2'-c_0\frac{\theta_2'\theta_3'^{\,5}(\vartheta_2^{\,4}+\vartheta_3^{\,4})}{\vartheta_3^{\,10}}y_0'=c_1\frac{\vartheta_2^{\,3}}{\vartheta_3^{\,3}},$$

$$14)\quad \frac{\theta_2}{\theta_0}y_2-\frac{9\theta_2\theta_3^{\,4}}{\theta_0\vartheta_3^{\,4}}y_0+c_0\frac{\theta_2'}{\theta_0'}y_2'-c_0\frac{\theta_2'\theta_3'^{\,4}}{\theta_0'\vartheta_3^{\,4}}y_0'=-\frac{3c_1\vartheta_2^{\,3}}{2\vartheta_0^{\,3}}.$$

. . . .

Mit diesem Gleichungssystem verbinden wir das folgende:

$$15)\quad \begin{cases} \vartheta_0(3v,3\tau)+c_2\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right)=c_3\vartheta_3^{\,2}(v,\tau)\,\vartheta_0(v,\tau),\\ \vartheta_3(3v,3\tau)+c_2\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{3}\right)=c_3\vartheta_0^{\,2}(v,\tau)\,\vartheta_3(v,\tau),\\ \vartheta_1(3v,3\tau)-c_2\vartheta_1\left(v,\frac{\tau}{3}\right)=c_3\vartheta_2^{\,2}(v,\tau)\,\vartheta_1(v,\tau),\\ \vartheta_2(3v,3\tau)+c_2\vartheta_2\left(v,\frac{\tau}{3}\right)=-c_3\vartheta_1^{\,2}(v,\tau)\,\vartheta_2(v,\tau). \end{cases}$$

Aus demselben folgen die Gleichungen:

$$16)\quad y_0+c_2y_0'=c_3\frac{\vartheta_3^{\,2}}{\vartheta_0^{\,2}},$$

$$17)\quad \frac{\theta_3}{\theta_0}y_0+c_2\frac{\theta_3'}{\theta_0'}y_0'=c_3\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0},$$

$$18)\quad \frac{3\theta_2\theta_3}{\vartheta_3^{\,2}}y_0-c_2\frac{\theta_2'\theta_3'}{\vartheta_3^{\,2}}y_0'=c_3\frac{\vartheta_2^{\,3}}{\vartheta_3\,.\,\vartheta_0^{\,2}},$$

$$19)\quad \frac{\theta_2}{\theta_0}y_0+c_2\frac{\theta_2'}{\theta_0'}y_0'=0,$$

$$20)\quad y_2+c_2y_2'=-\frac{\vartheta_2^{\,4}}{\vartheta_0^{\,2}\vartheta_3^{\,2}},$$

. . . .

Zu neuen Gleichungen gelangt man, indem man in der Gleichung:

$$\vartheta_0(3v,3\tau)+c\,\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{3}\right)=c'\,\vartheta_\alpha^2(v,\tau)\,\vartheta_0(v,\tau)$$

einmal $\alpha=1$, das andere Mal $\alpha=2$ setzt und mit den Gleichungssystemen, die hieraus durch Substitution halber Perioden entstehen, ähnlich verfährt wie mit den beiden ersten. Wir begnügen uns damit, die Gleichungssysteme selbst anzugeben. Das eine lautet:

$$21)\quad \begin{cases} \vartheta_0(3v, 3\tau) + c_4\vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = c_5\vartheta_1^2(v, \tau)\vartheta_0(v, \tau), \\ \vartheta_3(3v, 3\tau) + c_4\vartheta_3\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = c_5\vartheta_2^2(v, \tau)\vartheta_3(v, \tau), \\ \vartheta_1(3v, 3\tau) - c_4\vartheta_1\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = -c_5\vartheta_0^2(v, \tau)\vartheta_1(v, \tau), \\ \vartheta_2(3v, 3\tau) + c_4\vartheta_2\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = c_5\vartheta_3^2(v, \tau)\vartheta_2(v, \tau), \end{cases}$$

das andere nimmt die Gestalt an:

$$22)\quad \begin{cases} \vartheta_0(3v, 3\tau) + c_6\vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = c_7\vartheta_2^2(v, \tau)\vartheta_0(v, \tau), \\ \vartheta_3(3v, 3\tau) + c_6\vartheta_3\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = c_7\vartheta_1^2(v, \tau)\vartheta_3(v, \tau), \\ \vartheta_1(3v, 3\tau) - c_6\vartheta_1\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = -c_7\vartheta_3^2(v, \tau)\vartheta_1(v, \tau), \\ \vartheta_2(3v, 3\tau) + c_6\vartheta_2\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = -c_7\vartheta_0^2(v, \tau)\vartheta_2(v, \tau). \end{cases}$$

Wenn man die Unbekannten eliminirt, so erhält man aus dem ersten Gleichungssystem folgende drei Relationen:

$$23)\quad \begin{cases} \left(3\frac{\theta_2}{\theta_3'} + \frac{\theta_2'}{\theta_3}\right)\vartheta_3^3 = \left(3\frac{\theta_2}{\theta_0'} + \frac{\theta_2'}{\theta_0}\right)\vartheta_0^3, \\ \left(3\frac{\theta_3}{\theta_2'} + \frac{\theta_3'}{\theta_2}\right)\vartheta_2^3 = \left(3\frac{\theta_3}{\theta_0'} + \frac{\theta_3'}{\theta_0}\right)\vartheta_0^3, \\ \left(3\frac{\theta_0}{\theta_3'} + \frac{\theta_0'}{\theta_3}\right)\vartheta_3^3 = \left(3\frac{\theta_0}{\theta_2'} + \frac{\theta_0'}{\theta_2}\right)\vartheta_2^3. \end{cases}$$

Aus je einem der drei letzten Gleichungssysteme resultiren die Beziehungen:

$$24)\quad \begin{cases} \frac{\theta_2}{\theta_0} - \frac{\theta_2'}{\theta_0'} = -\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0^3}(3\theta_2\theta_3 + \theta_2'\theta_3'), \\ \frac{\theta_3}{\theta_2} - \frac{\theta_3'}{\theta_2'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2^3}(3\theta_0\theta_3 + \theta_0'\theta_3'), \\ \frac{\theta_0}{\theta_3} - \frac{\theta_0'}{\theta_3'} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3^3}(3\theta_0\theta_2 + \theta_0'\theta_2'), \end{cases}$$

ferner ein analoges System:

$$
25)\quad \begin{cases}
\dfrac{\theta_3}{\theta_0} - \dfrac{\theta_3'}{\theta_0'} = -\dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_2{}^3}(3\,\theta_2\theta_3 + \theta_2'\theta_3'),\\[2mm]
\dfrac{\theta_0}{\theta_2} - \dfrac{\theta_0'}{\theta_2'} = \dfrac{\vartheta_3}{\vartheta_2{}^3}(3\,\theta_0\theta_3 + \theta_0'\theta_3'),\\[2mm]
\dfrac{\theta_2}{\theta_3} - \dfrac{\theta_2'}{\theta_3'} = -\dfrac{\vartheta_0}{\vartheta_3{}^3}(3\,\theta_0\theta_2 + \theta_0'\theta_2'),
\end{cases}
$$

und endlich die drei eleganten Relationen:

$$
26)\quad \begin{cases}
\vartheta_3(\theta_0\,.\,\theta_3' - \theta_3\,.\,\theta_0') = \vartheta_2(\theta_0\,.\,\theta_2' - \theta_2\,.\,\theta_0'),\\
\vartheta_3(\theta_3\,.\,\theta_2' - \theta_2\,.\,\theta_3') = \vartheta_0(\theta_0\,.\,\theta_2' - \theta_2\,.\,\theta_0'),\\
\vartheta_0(\theta_0\,.\,\theta_3' - \theta_3\,.\,\theta_0') = \vartheta_2(\theta_3\,.\,\theta_2' - \theta_2\,.\,\theta_3').
\end{cases}
$$

In ähnlicher Weise können noch eine Fülle weiterer Relationen aufgestellt werden. Es erübrigt noch, Beziehungen zwischen je drei Repräsentanten aufzustellen. Nach unseren allgemeinen Betrachtungen sind wir berechtigt, die folgenden Gleichungen aufzustellen:

$$
27)\quad \begin{cases}
\vartheta_0\left(v, \dfrac{\tau}{3}\right) + c_0\vartheta_0\left(v, \dfrac{\tau+8}{3}\right) + c_1\vartheta_0\left(v, \dfrac{\tau+16}{3}\right) = 0,\\[2mm]
\vartheta_3\left(v, \dfrac{\tau}{3}\right) + c_0\vartheta_3\left(v, \dfrac{\tau+8}{3}\right) + c_1\vartheta_3\left(v, \dfrac{\tau+16}{3}\right) = 0,\\[2mm]
\vartheta_1\left(v, \dfrac{\tau}{3}\right) + c_0\vartheta_1\left(v, \dfrac{\tau+8}{3}\right) + c_1\vartheta_1\left(v, \dfrac{\tau+16}{3}\right) = 0,\\[2mm]
\vartheta_2\left(v, \dfrac{\tau}{3}\right) + c_0\vartheta_2\left(v, \dfrac{\tau+8}{3}\right) + c_1\vartheta_2\left(v, \dfrac{\tau+16}{3}\right) = 0.
\end{cases}
$$

Hier ist eine Entwickelung nach Potenzen von u gar nicht nöthig. Es genügt in den drei Gleichungen $v = 0$ zu setzen und eine Relation zu benützen, die freilich erst später bewiesen werden wird:

$$
28)\quad \vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{3}\right) + \alpha\vartheta_0\left(v, \frac{\tau+8}{3}\right) + \alpha^2\vartheta_0\left(v, \frac{\tau+16}{3}\right) = 0,
$$

wobei α eine bestimmte dritte Einheitswurzel bedeutet.

Durch Vergleichung und Verbindung der gefundenen Resultate erhält man Relationen von der Form:

$$
29)\quad \begin{cases}
\theta_3'\theta_0''' - \theta_0'\theta_3''' = \alpha\,(\theta_0''\theta_3''' - \theta_3''\theta_0'''),\\
\theta_0'\theta_3'' - \theta_3'\theta_0'' = \alpha^2(\theta_0''\theta_3''' - \theta_3''\theta_0'''),\\
\theta_3'\theta_0''' - \theta_0'\theta_0''' = \alpha^2(\theta_0'\,\theta_3'' - \theta_3'\,\theta_0'')\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

wobei gesetzt ist:

$$
\theta_0'' = \vartheta_0\left(0, \frac{\tau+8}{3}\right),\quad \theta_0''' = \vartheta_0\left(0, \frac{\tau+16}{3}\right).
$$

Im Falle $n = 5$ wollen wir uns noch kürzer fassen.

Wir können den Ansatz machen:

$$30)\begin{cases} \vartheta_0(5v,5\tau)=c_1\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{5}\right)+c_2\vartheta_0^3(v,\tau)\vartheta_1^2(v,\tau)+c_3\vartheta_0(v,\tau)\vartheta_1^4(v,\tau),\\ \vartheta_3(5v,5\tau)=c_1\vartheta_3\left(v,\frac{\tau}{5}\right)+c_2\vartheta_3^3(v,\tau)\vartheta_2^2(v,\tau)+c_3\vartheta_3(v,\tau)\vartheta_2^4(v,\tau),\\ \vartheta_1(5v,5\tau)=c_1\vartheta_1\left(v,\frac{\tau}{5}\right)+c_2\vartheta_1^3(v,\tau)\vartheta_0^2(v,\tau)+c_3\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_0^4(v,\tau),\\ \vartheta_2(5v,5\tau)=c_1\vartheta_2\left(v,\frac{\tau}{5}\right)+c_2\vartheta_2^3(v,\tau)\vartheta_3^2(v,\tau)+c_3\vartheta_2(v,\tau)\vartheta_3^4(v,\tau). \end{cases}$$

Nimmt man nun dieselben Operationen wie im Falle $n=3$ vor und setzt die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u links und rechts einander gleich, so ergeben sich die Gleichungen:

$$31)\qquad y_0=c_1y_0',$$

$$32)\qquad \frac{\theta_3}{\theta_0}y_0=\frac{\theta_3'}{\theta_0'}c_1y_0'+c_2\frac{\vartheta_3^3\vartheta_2^2}{\vartheta_0^5}+c_3\frac{\vartheta_3\vartheta_2^4}{\vartheta_0^5},$$

$$33)\qquad \frac{5\theta_2\theta_3}{\vartheta_3^2}y_0=\frac{\theta_2'\theta_3'}{\vartheta_3^2}c_1y_0'+\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}c_3,$$

$$34)\qquad \frac{\theta_2}{\theta_0}y_0=\frac{\theta_2'}{\theta_0'}c_1y_0'+\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^2}{\vartheta_0^5}c_2+\frac{\vartheta_2\vartheta_3^4}{\vartheta_0^5}c_3,$$

$$35)\qquad y_2=c_1y_2'+\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}c_2,$$

. . . .

In diesen Gleichungen ist ähnlich wie im Falle $n=3$ gesetzt:

$$\frac{\vartheta_0(5v,5\tau)}{\vartheta_0^5(v,\tau)}=y_0+y_2u^2+y_4u^4+\cdots,$$

$$\frac{\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{5}\right)}{\vartheta_0^5(v,\tau)}=y_0'+y_2'u^2+y_4'u^4+\cdots,$$

$$\theta_\alpha=\vartheta_\alpha(0,5\tau),\quad \theta_\alpha'=\vartheta_\alpha\left(0,\frac{\tau}{5}\right).$$

Ausser den von uns gewählten Ausgangsgleichungen kann man noch weitere wählen, unter denen wir die Gleichungen hervorheben:

$$\vartheta_0(5v,5\tau)=c_4\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{5}\right)+c_5\vartheta_0^5(v)+c_6\vartheta_0^3(v)\vartheta_1^2(v)$$

und:

$$\vartheta_0(5v,5\tau)=c_7\vartheta_0\left(v,\frac{\tau}{5}\right)+c_8\vartheta_0^5(v)+c_9\vartheta_0(v)\vartheta_1^4(v).$$

Es kann dann mit diesen genau so operirt werden, wie mit den früheren.

Man erhält nun aus den entwickelten resp. angedeuteten Gleichungen mit leichter Mühe die folgenden Relationen:

$$36)\quad \begin{cases} \theta_0.\theta_0'(5\theta_2.\theta_3-\theta_2'.\theta_3')=\vartheta_0.\vartheta_3(\theta_2.\theta_0'-\theta_0.\theta_2')-\vartheta_0.\vartheta_2(\theta_3.\theta_0'-\theta_0.\theta_3'), \\ \theta_2.\theta_2'(5\theta_0.\theta_3-\theta_0'.\theta_3')=\vartheta_2.\vartheta_3(\theta_0.\theta_2'\quad\theta_2.\theta_0')-\vartheta_0.\vartheta_2(\theta_3.\theta_2'-\theta_2.\theta_3'), \\ \theta_3.\theta_3'(5\theta_0.\theta_2-\theta_0'.\theta_2')=\vartheta_2.\vartheta_3(\theta_0.\theta_3'-\theta_3.\theta_0')-\vartheta_0.\vartheta_3(\theta_2.\theta_3'-\theta_3.\theta_2'). \end{cases}$$

Durch Combination der Gleichungen ergiebt sich:

$$37)\quad \begin{cases} (5\theta_0\theta_2+\vartheta_0\vartheta_2)\,(\vartheta_2\theta_0'+\vartheta_0\theta_2')\theta_3=(\vartheta_0\vartheta_2+\theta_0'\theta_2')\,(\vartheta_2\theta_0+\vartheta_0\theta_2)\theta_3', \\ (5\theta_2\theta_3-\vartheta_2\vartheta_3)\,(\vartheta_3\theta_2'-\vartheta_2\theta_3')\theta_0=(\vartheta_2\vartheta_3-\theta_2'\theta_3')\,(\vartheta_3\theta_2-\vartheta_2\theta_3)\theta_0', \\ (5\theta_0\theta_3-\vartheta_0\vartheta_3)\,(\vartheta_0\theta_3'-\vartheta_3\theta_0')\theta_2=(\vartheta_0\vartheta_3-\theta_0'\theta_3')\,(\vartheta_0\theta_3-\vartheta_3\theta_0)\theta_2'. \end{cases}$$

Ebenso einfach erhalten wir:

$$38)\quad \begin{cases} (\vartheta_2\theta_3-\vartheta_3\theta_2)(\vartheta_2\theta_3'-\vartheta_3\theta_2')\theta_0=(\vartheta_2\vartheta_3-\theta_2\theta_3)(\vartheta_2\vartheta_3-\theta_2'\theta_3')\theta_0', \\ (\vartheta_3\theta_0-\vartheta_0\theta_3)(\vartheta_3\theta_0'-\vartheta_0\theta_3')\theta_2=(\vartheta_0\vartheta_3-\theta_0\theta_3)(\vartheta_0\vartheta_3-\theta_0'\theta_3')\theta_2', \\ (\vartheta_0\theta_2+\vartheta_2\theta_0)(\vartheta_0\theta_2'-\vartheta_2\theta_0')\theta_3=(\vartheta_0\vartheta_2+\theta_0\theta_2)(\vartheta_0\vartheta_2+\theta_0'\theta_2')\theta_3'. \end{cases}$$

Endlich greifen wir noch das System von Gleichungen heraus:

$$39)\quad \begin{cases} (5\theta_2\theta_3-\vartheta_2\vartheta_3)(5\vartheta_2\vartheta_3-\theta_2'\theta_3')\theta_0=(\vartheta_2\theta_3-\theta_2\vartheta_3)(\vartheta_3\theta_2'-\vartheta_2\theta_3')\theta_0', \\ (5\theta_0\theta_3-\vartheta_0\vartheta_3)(5\vartheta_0\vartheta_3-\theta_0'\theta_3')\theta_2=(\vartheta_3\theta_0-\theta_3\vartheta_0)(\vartheta_0\theta_3'-\vartheta_3\theta_0)\theta_2', \\ (5\theta_0\theta_2+\vartheta_0\vartheta_2)(5\vartheta_0\vartheta_2+\theta_0'\theta_2')\theta_3=(\vartheta_0\theta_2+\theta_0\vartheta_2)(\vartheta_2\theta_0'+\vartheta_0\theta_2')\theta_3'. \end{cases}$$

Hier möge abgebrochen werden. Es ist klar, dass auf diesem Wege eine unendliche Fülle weiterer Relationen zwischen je zwei, drei, ... Repräsentanten abgeleitet werden können.

Vierter Abschnitt.

Die Theorie der doppeltperiodischen Functionen auf Grund der Thetafunctionen mit gebrochener Charakteristik.

---

§ 76.[36])

Einführung der Thetafunctionen mit gebrochener Charakteristik. Haupteigenschaften derselben.

Wenngleich wir vermöge der Betrachtungen des vorigen Paragraphen im Stande sind, allgemeine Transformationsgleichungen zwischen ursprünglichen und transformirten Grössen aufzustellen, so gilt von ihnen doch, und zwar in noch höherem Masse, dasselbe wie von den Betrachtungen, die bei Gelegenheit der Theorie der gewöhnlichen Transformationsgleichungen im Weber'schen Sinne aufgestellt worden sind. Für allgemeine Werthe von n versagt bisher die Methode. Unter solchen Umständen müssen wir versuchen, ganz neue Gesichtspunkte und Untersuchungsarten zu finden, mit deren Hülfe das Transformationsproblem in der angegebenen Weise wenn auch nicht gelöst so doch gefördert werden kann. Zu dem Behufe sollen neue Functionen in unsere Theorie eingeführt werden, und zwar zunächst die Thetafunctionen mit gebrochener Charakteristik. Diese Grössen und die weiteren mit ihnen zusammenhängenden in der Folge einzuführenden Grössen haben aber nicht nur für die Transformationstheorie Bedeutung, sondern vor Allem auch für die Theorie der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art, die mit ihrer Hülfe wesentlich gefördert werden kann.

Unter solchen Umständen ist den folgenden Betrachtungen eine besondere Bedeutung beizulegen.

Wir definiren zunächst:

$$1\text{a)}\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v) = \sum e^{\pi i\tau\left(m+\frac{g}{n}\right)^2+2\pi i\left(m+\frac{g}{n}\right)\left(v+\frac{h}{n}\right)}$$

oder was dasselbe sagt:

$$\text{1b)}\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v) = \vartheta_3\left(v + \frac{g\tau}{n} + \frac{h}{n}\right)e^{\frac{\pi i g}{n}\left(2v + \frac{2h}{n} + \frac{g\tau}{n}\right)},$$

ferner werde etwas verallgemeinert gesetzt:

$$\text{2)}\qquad \vartheta_\alpha\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v) = \vartheta_\alpha\left(v + \frac{g\tau}{n} + \frac{h}{n}\right)e^{\frac{\pi i g}{n}\left(2v + \frac{2h}{n} + \frac{g\tau}{n}\right)}.$$

Hierbei bedeuten g, h beliebige ganze Zahlen, n eine beliebige positive ganze Zahl. Die Hinzunahme der Indices α ist aus praktischen Gründen erfolgt, an und für sich können sie entbehrt werden.

Die eingeführten Functionen sind die Thetafunctionen mit gebrochener Charakteristik. Es handelt sich darum, ihre Haupteigenschaften aufzustellen, vor allem auch die Beziehungen zu entwickeln, in denen sie zu den ursprünglichen Thetafunctionen stehen.

Die gegebene Definition lehrt unmittelbar die Existenz der folgenden Gleichungen:

$$\text{3)}\qquad \begin{cases} \vartheta_3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v+1) = \vartheta_3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v)e^{\frac{2\pi i g}{n}}, \\ \vartheta_3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v+\tau) = \vartheta_3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v)e^{-\pi i\left(2v+\tau+\frac{2h}{n}\right)}, \\ \vartheta_3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(v + \frac{g'\tau}{n} + \frac{h'}{n}\right) = \vartheta_3\begin{bmatrix} g+g' \\ h+h' \end{bmatrix}(v)e^{-\frac{\pi i g'}{n}\left(2v + \frac{2(h+h')}{n} + \frac{g'\tau}{n}\right)}. \end{cases}$$

Aehnliche Formeln gelten für die übrigen Indices. Der Uebergang der Thetafunctionen in einander geschieht nach folgender Tabelle:

$$\text{4)}\qquad \begin{cases} \vartheta_3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(v+\frac{1}{2}\right) = \vartheta_0\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v)e^{\frac{\pi i g}{n}}, \\ \vartheta_0\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(v+\frac{1}{2}\right) = \vartheta_3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v)e^{\frac{\pi i g}{n}}, \\ \vartheta_2\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(v+\frac{1}{2}\right) = -\vartheta_1\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v)e^{\frac{\pi i g}{n}}, \\ \vartheta_1\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(v+\frac{1}{2}\right) = \vartheta_2\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v)e^{\frac{\pi i g}{n}}; \end{cases}$$

$$\text{5)}\qquad \begin{cases} \vartheta_3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = \varepsilon\,.\,\vartheta_2\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v), \\ \vartheta_2\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = \varepsilon\,.\,\vartheta_3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v), \\ \vartheta_1\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = i\,.\,\varepsilon\,.\,\vartheta_0\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v), \\ \vartheta_0\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = i\,.\,\varepsilon\,.\,\vartheta_1\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v), \\ \qquad\qquad \varepsilon = e^{-\frac{\pi i h}{n} - \frac{\pi i}{2}\left(2v + \frac{\tau}{2}\right)}. \end{cases}$$

$$
6)\quad\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau+1}{2}\right)=i.\varepsilon_1.\vartheta_1\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v),\\
&\vartheta_1\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau+1}{2}\right)=\varepsilon_1.\vartheta_3\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v),\\
&\vartheta_2\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau+1}{2}\right)=-i.\varepsilon_1.\vartheta_0\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v),\\
&\vartheta_0\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}\left(v+\frac{\tau+1}{2}\right)=\varepsilon_1.\vartheta_2\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v),\\
&\qquad\varepsilon_1=e^{-\frac{\pi i}{n}(g-h)-\frac{\pi i}{2}\left(2v+\frac{\tau}{2}\right)}.
\end{aligned}\right.
$$

Zwischen den soeben eingeführten Functionen und den ursprünglich betrachteten Theta- resp. elliptischen Functionen bestehen Beziehungen engster Art. In der That, bilden wir die n^{te} Potenz irgend einer unserer Functionen, so ist dieselbe eine Thetafunction n^{ter} Ordnung, lässt sich also nach bekannten Regeln durch die gewöhnlichen Thetafunctionen darstellen. Ebendasselbe gilt von den Producten zu je n, also:

$$\prod\vartheta_\alpha\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(v),$$

bei denen

$$\sum g\equiv\sum h\equiv 0 \mod n$$

ist. Um die Darstellung durch gewöhnliche Thetafunctionen wirklich durchzuführen, greifen wir eine Function heraus, z. B.

$$\vartheta_3^n\left(v+\frac{1}{n}\right).$$

Dieselbe kann nach früheren Untersuchungen in die Form gebracht werden:

$$
7)\quad\left\{\begin{aligned}
\vartheta_3^n\left(v+\frac{1}{n}\right)&=c_1\vartheta_3^n(v)+c_2\vartheta_3^{n-2}(v)\vartheta_2^2(v)+\cdots c_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3(v)\vartheta_2^{n-1}(v)\\
&+c_{\frac{n+3}{2}}\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3^{n-3}(v)+\cdots c_n\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)\vartheta_2^{n-2}(v).
\end{aligned}\right.
$$

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich hieraus drei analoge Gleichungen, von deren Aufstellung indessen abgesehen werden möge.

Um die auftretenden Constanten zu bestimmen, führen wir elliptische Functionen ein durch die Gleichungen:

$$u=\pi\vartheta_3^2 v=2Kv,$$

$$\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\,sn\,u,\quad \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\,cn\,u,\quad \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\,dn\,u.$$

Unsere Gleichung kann dann in die Form gebracht werden:

$$8)\left\{\begin{aligned}&\frac{\vartheta_0^n\left(v+\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0^n(v)}dn^n\left(u+\frac{2K}{n}\right)=c_1 dn^n u+c_2 dn^{n-2}u\,.\,cn^2 u\frac{\vartheta_2{}^2}{\vartheta_3{}^2}+\cdots c_{\frac{n+1}{2}}dn u\,.\,cn^{n-1}u\frac{\vartheta_2^{n-1}}{\vartheta_3^{n-1}}\\&\qquad+c_{\frac{n+3}{2}}sn u\,.\,cn u\,.\,dn^{n-3}u\frac{\vartheta_0{}^2\,.\,\vartheta_2{}^2}{\vartheta_3{}^4}+\cdots c_n sn u\,.\,cn^{n-2}u\frac{\vartheta_0{}^2\,.\,\vartheta_2^{n-1}}{\vartheta_3^{n+1}}.\end{aligned}\right.$$

Eine ähnliche Form würden die drei Gleichungen annehmen, die durch Substitution halber Perioden abgeleitet sind.

Die elliptischen Functionen mit den Argumenten u und $u+\frac{2K}{n}$ können wir uns nach Potenzen von u entwickelt denken. In den Coefficienten treten dann k^2 und die Theilwerthe der elliptischen Functionen ganz und rational auf. Der Quotient:

$$\frac{\vartheta_0^n\left(v+\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0^n(v)},$$

welcher in allen vier Gleichungen auftritt, möge auch in eine Potenzreihe von u entwickelt werden.

Die Coefficienten sehen wir als unbekannte Grössen an, mit Ausnahme des constanten Gliedes, welches gleich:

$$\frac{\vartheta_0^n\left(\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0^n}$$

ist.

Dann folgt durch Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von u erstens eine Bestimmung der Constanten c. Ganz allgemein können wir sagen, dieselben drücken sich rational durch $\vartheta_\alpha\left(\frac{1}{n}\right)$ und ϑ_α aus, wir können aber auch specieller uns so ausdrücken.

Setzen wir:

$$c_1'=c_1,\quad c_2'=c_2\frac{\vartheta_2{}^2}{\vartheta_3{}^2},\cdots c'_{\frac{n+1}{2}}=c_{\frac{n+1}{2}}\frac{\vartheta_2^{n-1}}{\vartheta_3^{n-1}},$$

$$c'_{\frac{n+3}{2}}=c_{\frac{n+3}{2}}\frac{\vartheta_2{}^2}{\vartheta_0{}^2},\cdots c_n'=c_n\frac{\vartheta_2^{n-1}}{\vartheta_0{}^2\,.\,\vartheta_3^{n-3}},$$

so drücken die Constanten c' sich rational durch:

$$\frac{\vartheta_0^n\left(\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0^n},$$

k^2 und die Theilwerthe der elliptischen Functionen aus. Dabei ist die Darstellung derart, dass der Quotient je zweier sich rational durch k^2 und die Theilwerthe der elliptischen Functionen ausdrücken lässt.

Wir erhalten somit den

Lehrsatz: Die Function

$$\frac{\vartheta_0^n\left(v+\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0^n(v)}$$

drückt sich ganz und rational durch die gewöhnlichen elliptischen Functionen aus. Die Coefficienten setzen sich rational aus:

$$\frac{\vartheta_0^n\left(\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0^n},$$

k^2 und den Theilwerthen der elliptischen Functionen zusammen, so zwar, dass der Quotient je zweier sich rational durch die letzten beiden Kategorien von Constanten darstellen lässt.

Neben dieser Darstellungsweise der Constanten ergeben sich aber zweitens unendlich viele Beziehungen zwischen den von uns eingeführten Grössen.

An Stelle der Function:

$$\frac{\vartheta_0^n\left(v+\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0^n(v)}$$

kann auch das Product derselben und der n^{ten} Potenz von $sn\,u_1, cn\,u_1, dn\,u_1$ treten für $u_1 = u + \frac{2K}{n}$.

Für die übrigen Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken d. h. für die n^{ten} Potenzen derselben bestehen analoge Relationen, ebenso für die Producte zu je n, die den vorhin angegebenen Bedingungen Genüge leisten. Wir sehen davon ab, die hierauf bezüglichen Sätze wirklich aufzustellen.

Wir haben bei den letzten Betrachtungen dreierlei von einander verschiedene Constanten eingeführt. Es finden hierbei noch eine Reihe von Beziehungen statt.

Nehmen wir dazu die Gleichung:

$$\frac{\vartheta_0(nv, n\tau)}{\vartheta_0^n(v,\tau)}\,\frac{\vartheta_0^n}{\vartheta_0(0,\tau')} = c_1 + c_2 sn^2 u + \cdots,$$

so sind die Constanten rational durch die ursprünglichen und transformirten Thetaquotienten ausdrückbar. Letztere aber können wiederum unmittelbar durch die Theilwerthe dargestellt werden.

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Die Grösse

$$\frac{\vartheta_0^n\left(\frac{1}{n}\right)}{\vartheta_0^n}$$

kann rational durch k^2 und die Theilwerthe der elliptischen Functionen dargestellt werden.

Offenbar ist auch dieser Satz nur ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes, welcher sich auf die Functionen:

$$\frac{\vartheta_\alpha^n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(0)}{\vartheta_\alpha^n}$$

bezieht und kaum ausgesprochen zu werden braucht. Ferner ist klar, dass an Stelle der n^{ten} Potenzen auch gewisse Producte treten können.

So haben wir nur noch zwei Kategorien von Constanten beibehalten.

Die Theilwerthe sind nun Wurzeln algebraischer Gleichungen, von denen schon gesprochen ist. Es ist klar, dass durch einfache Operationen die sämmtlichen Functionen:

$$sn\left(\frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right), \quad cn\left(\frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right), \quad dn\left(\frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right)$$

auf zwei derselben und zwar auf:

$$sn\left(\frac{2K}{n}\right) \quad \text{und} \quad sn\left(\frac{2iK'}{n}\right)$$

reducirt werden können. Es führen zu diesem Resultat die Additions- und Multiplicationstheoreme der elliptischen Functionen, sowie die Beziehungen, die zwischen letzteren bestehen. Unter solchen Umständen bleiben als Constanten lediglich die Grössen übrig:

$$sn\left(\frac{2K}{n}\right), \quad sn\left(\frac{2iK'}{n}\right), \quad k^2,$$

wobei zwischen diesen bekannte algebraische Beziehungen bestehen.

Die soeben angestellte Untersuchung dürfte wohl nach theoretischer Richtung hin die einfachste und gewissermassen von selbst gegebene sein, um unsere allgemeinen Functionen durch die bisher von uns aufgestellten darzustellen. Daneben aber sind anderweite Untersuchungen nicht ausgeschlossen, ja sogar wünschenswerth, mit deren Hülfe unsere allgemeinen Functionen in anderer Weise auf wenige andere Grössen zurückgeführt werden.

§ 77.

Specielle Discussion der Fälle $n = 3$ und $n = 5$.

Wir wollen jetzt die soeben gewonnenen Methoden in den Fällen $n = 3$ und $n = 5$ näher durchführen.

Hierbei empfiehlt es sich der grösseren Uebersichtlichkeit halber, die Thetafunctionen auch da beizubehalten, wo ohne Schwierigkeit elliptische Functionen eingeführt werden können.

Es wird nun für den Fall $n = 3$:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\vartheta_0^3\left(v+\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v)}\,dn^3\left(u+\frac{2K}{3}\right)=c_1\,dn^3u+c_2\,dn\,u\,cn^2u\,\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}+c_3\,sn\,u.cn\,u\,\frac{\vartheta_0^2.\vartheta_2^2}{\vartheta_3^4},\\
&-\frac{\vartheta_0^3\left(v+\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v)}\,cn^3\left(u+\frac{2K}{3}\right)=c_1\,cn^3u+c_2\,cn\,u\,dn^2u\,\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}-c_3\,sn\,u.dn\,u\,\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2},\\
&\frac{\vartheta_0^3\left(v+\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v)}=c_1+c_2\,sn^2u\,\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}-c_3\,sn\,u\,cn\,u\,dn\,u\,\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2},\\
&-\frac{\vartheta_0^3\left(v+\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v)}\,sn^3\left(u+\frac{2K}{3}\right)=c_1\,sn^3u+c_2\,sn\,u\,\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}+c_3\,cn\,u\,dn\,u\,\frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_0^2.\vartheta_2^2}.
\end{aligned}\right.$$

Führen wir die Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen ein und setzen überdies:

$$\frac{\vartheta_0^3\left(v+\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v)}=\frac{\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0^3}+y_1u+y_2u^2+\cdots,$$

so erhalten wir durch Vergleichen der Coefficienten gleich hoher Potenzen u links und rechts das Gleichungsystem:

$$2)\quad c_1=\frac{\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0^3},\qquad 3)\quad c_3=-\frac{\vartheta_1^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3},$$

$$4)\quad y_1=-c_3\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2},\qquad 5)\quad y_2=c_2\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2},$$

$$6)\qquad c_1+c_2\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}=\frac{\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_3^3},$$

$$7)\qquad c_1+c_2\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}=-\frac{\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_2^3}.$$

$$8)\quad y_1\vartheta_0\vartheta_3^2\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)+3\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)=-c_2\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$9)\quad y_1\vartheta_0^3\vartheta_3^2\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right)-3\vartheta_2^2\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)=c_3\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$10)\quad y_1\vartheta_0^3\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right)-3\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)=c_3\vartheta_0^2\vartheta_2\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$11)\quad \vartheta_2\vartheta_3^2\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)[3c_1\vartheta_2^2\vartheta_3^2+c_2(\vartheta_0^4+3\vartheta_2^4)]=A_1+3\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)B_1,$$

$$A_1=2y_2\vartheta_0^3\vartheta_3^4\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right)-6y_1\vartheta_0^3\vartheta_3^4\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$B_1=2\vartheta_3^4\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)-2\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)(\vartheta_2^4-\vartheta_0^4).$$

$$12)\quad -\vartheta_2^2\vartheta_3\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)[3c_1\vartheta_2^2\vartheta_3^2-c_2(\vartheta_0^4-3\vartheta_3^4)]=A_2+3\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)B_2,$$

$$A_2=2y_2\vartheta_0^3\vartheta_3^4\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right)-6y_1\vartheta_0^3\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$B_2=2\vartheta_2^4\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)-2\vartheta_0^2\vartheta_3^2\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4).$$

$$13)\quad c_3\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)=A_3+3\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{3}\right)B_3,$$

$$A_3=2y_2\vartheta_0^3\vartheta_3^4\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^3\left(\frac{1}{3}\right)+6y_1\vartheta_0^5\vartheta_3^2\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$B_3=2\vartheta_0^4\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)+2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^4\left(\frac{1}{3}\right)-\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4).$$

etc.

Durch diese Gleichungen sind die Coefficienten bestimmt, und zwar in mannigfacher Weise. Wir können etwa setzen:

$$14)\quad c_1=\frac{\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0^3},$$

$$15)\quad \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\frac{c_2}{c_1}=-1-cn^3\left(\frac{2K}{3}\right),$$

$$16)\quad \frac{\vartheta_0^2\vartheta_2^2}{\vartheta_3^4}\frac{c_3}{c_1}=-k^2k'^2sn^3\left(\frac{2K}{3}\right).$$

Daneben aber führen diese 12 Gleichungen zu einer grossen Reihe von Relationen.

Durch Combination der Gleichungen 1, 5, 6 des Systems erhalten wir die Relationen:

$$17)\quad \begin{cases} -c_2\vartheta_0^4\vartheta_2\vartheta_3 = \vartheta_2^3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right) + \vartheta_3^3\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right), \\ -c_2\vartheta_0^3\vartheta_2\vartheta_3^2 = \vartheta_0^3\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right) + \vartheta_2^3\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right), \\ -c_2\vartheta_0^3\vartheta_3\vartheta_2^2 = \vartheta_0^3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right) - \vartheta_3^3\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right), \end{cases}$$

woraus sich die Gleichungen ergeben:

$$18)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \dfrac{\vartheta_2^3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right) + \vartheta_3^3\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0^3\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right) + \vartheta_2^3\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta_0}{\vartheta_2} = \dfrac{\vartheta_2^3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right) + \vartheta_3^3\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_3^3\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right) - \vartheta_0^3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right)}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta_3}{\vartheta_2} = \dfrac{\vartheta_0^3\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right) + \vartheta_2^3\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_3^3\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right) - \vartheta_0^3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right)}. \end{cases}$$

Vermöge der Gleichung:

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4$$

können wir das letzte System auch schreiben:

$$19)\quad \vartheta_0\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right) = \vartheta_2\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right) + \vartheta_3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right).$$

Ferner erhält man vor allem vermöge der Gleichung 8) unseres Systems:

$$20)\quad \begin{cases} \vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_2^3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right) + \vartheta_3^3\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1^6\left(\frac{1}{3}\right) \\ \qquad + 3\vartheta_0^3\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right), \\ \vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_0^3\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right) + \vartheta_2^3\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \vartheta_2\vartheta_3^2\vartheta_1^6\left(\frac{1}{3}\right) \\ \qquad + 3\vartheta_0^2\vartheta_3\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right), \\ \vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_3^3\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right) - \vartheta_0^3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \vartheta_2^2\vartheta_3\vartheta_1^6\left(\frac{1}{3}\right) \\ \qquad + 3\vartheta_0^2\vartheta_2\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right). \end{cases}$$

Aus der 3., 4., 9. und 10. unserer Gleichungen erhalten wir:

$$21)\begin{cases}\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_0\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right)\right]=3\vartheta_2\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right),\\ \vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_0\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_2\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right)\right]=3\vartheta_3\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right),\\ \vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_3\vartheta_3^3\left(\frac{1}{3}\right)-\vartheta_2\vartheta_2^3\left(\frac{1}{3}\right)\right]=3\vartheta_0\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right).\end{cases}$$

Aus ihnen folgt das weitere System, welches auch leicht aus dem Additionstheorem abgeleitet werden kann:

$$22)\begin{cases}\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_2\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_3\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\vartheta_0\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right),\\ \vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_0\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_2\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\vartheta_3\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right),\\ \vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_3\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)-\vartheta_0\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\vartheta_2\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{1}{3}\right),\\ \vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_0\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_3\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\vartheta_2\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right).\end{cases}$$

Nehmen wir die letzten Gleichungen unseres Systems hinzu und verbinden sie mit den bisher gefundenen, so erhalten wir:

$$23)\begin{cases}\vartheta_3^4\left[\vartheta_1^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)-\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)\right]\\ \qquad=2\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)\right],\\ \vartheta_2^4\left[\vartheta_1^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)-\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)\right]\\ \qquad=2\vartheta_0^2\vartheta_3^2\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)-\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)\right],\\ \vartheta_0^4\left[\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^4\left(\frac{1}{3}\right)-\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)\right]\\ \qquad=2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)-\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)\right],\end{cases}$$

ferner:

$$
24)\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3^2\left[\vartheta_1^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)\right]\\
&\qquad=2\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_0^2\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_2^2\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\right],\\
&\vartheta_2^2\left[\vartheta_1^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)\right]\\
&\qquad=2\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_0^2\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_3^2\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\right],\\
&\vartheta_0^2\left[\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_1^4\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)\right]\\
&\qquad=2\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\left[\vartheta_2^2\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_3^2\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)\right].
\end{aligned}\right.
$$

Das letzte System kann in die Form gebracht werden:

$$
25)\left\{\begin{aligned}
&2\vartheta_2^2\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{1}{3}\right)=\vartheta_0\vartheta_3\left[\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)-\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)\right],\\
&2\vartheta_0^2\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)=\vartheta_2\vartheta_3\left[\vartheta_3^4\left(\frac{1}{3}\right)-\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)\right],\\
&2\vartheta_3^2\vartheta_0\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{3}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)=\vartheta_0\vartheta_2\left[\vartheta_0^4\left(\frac{1}{3}\right)+\vartheta_2^4\left(\frac{1}{3}\right)\right].
\end{aligned}\right.
$$

Hier wollen wir abbrechen. Es ist klar, dass noch eine Fülle weiterer Relationen aufgestellt werden kann.

Wir haben hierbei die Grösse:

$$\frac{\vartheta_0^3\left(v+\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v)}$$

zu Grunde gelegt. Ebenso gut hätten wir den Quotienten:

$$\frac{\vartheta_0^3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v)}{\vartheta_0^3(v)}$$

in Betracht ziehen können und wären dann zu ganz ähnlichen Resultaten gelangt. Endlich hätten wir auch statt der dritten Potenzen gewisse Producte unserer Functionen zu Grunde legen können. Da principiell sich hierbei nichts Neues ergiebt, so sehen wir von der Aufstellung der entsprechenden Resultate ab.

Wir haben nun im allgemeinen Falle gezeigt, dass die sämmtlichen auftretenden Constanten nach vorgeschriebenen Methoden durch gewisse besonders einfache unter ihnen sich darstellen lassen. Wir wollen auch

diese Reductionen im vorliegenden Falle nicht völlig durchführen, sondern lediglich die Constanten:

$$\frac{\vartheta_0^3\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(0)}{\vartheta_0^3}$$

ins Auge fassen.

Es gilt die Transformationsgleichung:

$$26)\quad \frac{\vartheta_0(3v, 3\tau)}{\vartheta_0^3(v, \tau)}\,\frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0(0, 3\tau)} = 1 + \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\,\frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)}\left(\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3(0, 3\tau)}{\vartheta_3^3\vartheta_0(0, 3\tau)} - 1\right).$$

Vermehren wir v um $\frac{1}{3}$, setzen $v = 0$ und erwägen weiter, dass zufolge der früher angegebenen Beziehungen zwischen den ursprünglichen und transformirten Moduln sein muss:

$$\frac{\vartheta_0(0, 3\tau)}{\vartheta_3(0, 3\tau)} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\,\frac{\vartheta_0^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{1}{3}\right)},$$

so folgt:

$$27)\quad \frac{\vartheta_0^3}{\vartheta_0^3\left(\frac{1}{3}\right)} = 1 - k^2 sn^4\left(\frac{2K}{3}\right).$$

Genau so einfach wird:

$$28)\quad -\frac{\vartheta_0^3 e^{-\frac{\pi i \tau}{3}}}{\vartheta_0^3\left(\frac{\tau}{3}\right)} = 1 - k^2 sn^4\left(\frac{2iK'}{3}\right),$$

$$29)\quad -\frac{\vartheta_0^3 e^{-\frac{\pi i}{3}(\tau+2)}}{\vartheta_0^3\left(\frac{\tau+1}{3}\right)} = 1 - k^2 sn^4\left(\frac{2K + 2iK'}{3}\right),$$

$$30)\quad -\frac{\vartheta_0^3 e^{-\frac{\pi i}{3}(\tau-2)}}{\vartheta_0^3\left(\frac{\tau-1}{3}\right)} = 1 - k^2 sn^4\left(\frac{2K - 2iK'}{3}\right).$$

Die übrigbleibenden Constanten sind k^2 und $sn^2\left(\frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right)$, von denen die letzten auf zwei unter ihnen zurückgeführt werden können, nämlich:

$$sn\,\frac{2K}{n} \quad \text{und} \quad sn\,\frac{2iK'}{n}.$$

Zwischen diesen Grössen bestehen algebraische Zusammenhänge. Setzen wir:

$$x = sn^2 \frac{2mK + 2m_1 iK'}{n},$$

so leistet x der Gleichung vierten Grades Genüge:

$$31)\qquad x^4 - \frac{6}{k^2}x^2 + 4\,\frac{1+k^2}{k^4}\,x - \frac{3}{k^4} = 0.$$

Aus dieser können die Wurzeln algebraisch bestimmt werden. Wir wollen hierbei einer Methode folgen, welche sich in einer Arbeit von Heinze findet.

Nennen wir die Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3, so finden die Gleichungen statt:

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{6}{k^2},$$
$$x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3 = -4\,\frac{1+k^2}{k^4},$$
$$x_0x_1x_2x_3 = -\frac{3}{k^4}.$$

Definiren wir R durch die Gleichung:

$$(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)^2 = 16R,$$

so erhalten wir zur Bestimmung von R eine kubische Gleichung, die nach einigen leichten Rechnungen die Form annimmt:

$$32)\qquad R^3 - \frac{3}{k^4}R^2 + \frac{3}{k^4}R - \frac{1}{4}\left(\frac{1+k^2}{k^4}\right)^2 = 0.$$

Nennen wir die drei Wurzeln R_0, R_1, R_2, so erhalten wir zur Bestimmung der Grössen x durch die Grössen R die Gleichungen:

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = \pm 4\sqrt{R_0},$$
$$x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = \pm 4\sqrt{R_1},$$
$$x_0 - x_1 - x_2 + x_3 = \pm 4\sqrt{R_2}.$$

Unter solchen Umständen sind die Werthe der vier Wurzeln in der Form:

$$\pm\sqrt{R_0} \pm \sqrt{R_1} \pm \sqrt{R_2}$$

enthalten. Diese Form giebt aber bei den verschiedenen Zeichencombinationen acht von einander verschiedene Werthe. Nun ist aber:

$$\pm 8\sqrt{R_0R_1R_2} = (x_0 + x_1)(x_0 + x_2)(x_0 + x_3) = x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3$$

oder also:

$$33)\qquad \pm 8\sqrt{R_0R_1R_2} = -4\,\frac{1+k^2}{k^4}.$$

Aus dieser Gleichung folgt die Bestimmung des Zeichens von $\sqrt{R_0}$, wenn die Zeichen von $\sqrt{R_1}$ und $\sqrt{R_2}$ gegeben sind, so dass vier Combinationen sich ergeben, welche den vier Wurzeln entsprechen. Die Grössen R sind aus der aufgestellten Gleichung leicht zu berechnen. Es ergiebt sich:

$$R_0 = \frac{1}{k^2}(1+\sqrt[3]{R}),$$

$$R_1 = \frac{1}{k^2}(1+\varepsilon\sqrt[3]{R}),$$

$$R_2 = \frac{1}{k^2}(1+\varepsilon^2\sqrt[3]{R}),$$

$$R = \frac{k'^4}{4k^2}, \quad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Ist k^2 reell und kleiner als 1 und wählt man für K den reellen Werth, so ist die Zuordnung der transcendenten Formen zu den soeben gefundenen durch einfache Zeichenuntersuchungen zu treffen.

Die Wurzel:

$sn^2\frac{2K}{3}$ entspricht den Zeichen $-++$,

ferner

$sn^2\frac{2iK'}{3}$ " " " $---$,

$sn^2\frac{2K-2iK'}{3}$ " " " $++-$,

$sn^2\frac{2K+2iK'}{3}$ " " " $+-+$.

Im allgemeinen Falle müssen die Reihenentwickelungen hinzugenommen werden. Es möge in Bezug hierauf u. A. auf eine Arbeit von Winzer verwiesen werden.

Die von uns entwickelte Darstellung der auftretenden Constanten durch eine einzige ist nicht die allein mögliche. Es sind noch andere Darstellungen möglich. Es möge in Bezug hierauf auf eine Arbeit von Krazer und die schon citirte von Voss verwiesen werden. Auch eine Arbeit von Thomae fällt in dieses Gebiet.

Im Falle $n=5$ fassen wir uns wesentlich kürzer.

Das fundamentale oder eins der fundamentalen Systeme nimmt die Form an:

$$
34)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\vartheta_0^5\left(v+\frac{1}{5}\right)}{\vartheta_0^5(v)}\, dn^5\left(u+\frac{2K}{5}\right) = c_1 dn^5 u + c_2 dn^3 u\, cn^2 u \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} + c_3 dn\, u\, cn^4 u \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}\\
&\qquad + c_4 sn u \,.\, cn u \,.\, dn^2 u \frac{\vartheta_0^2 \vartheta_2^2}{\vartheta_3^4} + c_5 sn u \,.\, cn^3 u \frac{\vartheta_0^2 \vartheta_2^2}{\vartheta_3^4},\\
&-\frac{\vartheta_0^5\left(v+\frac{1}{5}\right)}{\vartheta_0^5(v)}\, cn^5\left(u+\frac{2K}{5}\right) = c_1 cn^5 u + c_2 cn^3 u\, dn^2 u \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} + c_3 cn u \,.\, dn^4 u \frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_2^4}\\
&\qquad - c_4 sn u\, dn u\, cn^2 u \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2} + c_5 sn u \,.\, dn^3 u \frac{\vartheta_0^2 \vartheta_3^2}{\vartheta_2^4},\\
&\frac{\vartheta_0^5\left(v+\frac{1}{5}\right)}{\vartheta_0^5(v)} = c_1 + c_2 sn^2 u \,.\, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} + c_3 sn^4 u \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} - c_4 sn u \,.\, cn u \,.\, dn u \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\\
&\qquad - c_5 cn u \,.\, dn u \,.\, sn^3 u \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_3^2},\\
&-\frac{\vartheta_0^5\left(v+\frac{1}{5}\right)}{\vartheta_0^5(v)}\, sn^5\left(u+\frac{2K}{5}\right) = c_1 sn^5 u + c_2 sn^3 u \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} + c_3 sn u \frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_2^4}\\
&\qquad + c_4 cn u\, dn u\, sn^2 u \frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_0^2 \vartheta_2^2} + c_5 \,.\, cn u\, dn u \frac{\vartheta_3^6}{\vartheta_0^2 \,.\, \vartheta_2^4}.
\end{aligned}\right.
$$

Mit Hülfe der Reihenentwickelungen ergiebt sich:

$$
35)\quad c_1 = \frac{\vartheta_0^5\left(\frac{1}{5}\right)}{\vartheta_0^5}, \qquad 36)\quad y_1 = -c_4 \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2},
$$

$$
37)\quad y_2 = c_2 \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \qquad 38)\quad c_5 = -\frac{\vartheta_1^5\left(\frac{1}{5}\right)}{\vartheta_0^3 \vartheta_2 \vartheta_3},
$$

$$
39)\quad \vartheta_3^5\left(\frac{1}{5}\right) = \vartheta_3(c_1 \vartheta_3^4 + c_2 \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 + c_3 \vartheta_2^4),
$$

$$
40)\quad \vartheta_2^5\left(\frac{1}{5}\right) = -\vartheta_2(c_1 \vartheta_2^4 + c_2 \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 + c_3 \vartheta_3^4),
$$

$$
41)\left\{\begin{aligned}
&-5\vartheta_2^2 \vartheta_0^4\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_3^4\left(\frac{1}{5}\right) + y_1 \vartheta_0^5 \vartheta_3^2 \vartheta_3^5\left(\frac{1}{5}\right)\\
&\qquad = \vartheta_0^2 \vartheta_2^2 \vartheta_3 \vartheta_0^5\left(\frac{1}{5}\right)(c_4 \vartheta_3^2 + c_5 \vartheta_2^2),
\end{aligned}\right.
$$

$$
42)\left\{\begin{aligned}
&-5\vartheta_0^4\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_2^4\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{5}\right) + y_1 \vartheta_0^5 \vartheta_2^5\left(\frac{1}{5}\right)\\
&\qquad = \vartheta_0^2 \vartheta_2 \vartheta_0^5\left(\frac{1}{5}\right)(c_4 \vartheta_2^2 + c_5 \vartheta_3^2),
\end{aligned}\right.
$$

$$43)\quad \begin{cases} 5\vartheta_0^4\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_1^4\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{5}\right) + y_1\vartheta_0^3\vartheta_3^2\vartheta_1^5\left(\frac{1}{5}\right) \\ \qquad = -c_3\vartheta_0^3\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^5\left(\frac{1}{5}\right). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen sind die Constanten bestimmt, insbesondere erhalten wir für c_4 die drei Gleichungen:

$$44)\quad \begin{cases} 5\vartheta_0\vartheta_0^4\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_3^4\left(\frac{1}{5}\right) - \vartheta_2\vartheta_0^5\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_1^5\left(\frac{1}{5}\right) \\ \qquad = -c_4\vartheta_0^3.\vartheta_3^2\left[\vartheta_0\vartheta_3^5\left(\frac{1}{5}\right) + \vartheta_3\vartheta_0^5\left(\frac{1}{5}\right)\right], \\ 5\vartheta_0\vartheta_0^4\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_2^4\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{5}\right) - \vartheta_3\vartheta_0^5\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_1^5\left(\frac{1}{5}\right) \\ \qquad = -c_4\vartheta_0^3\vartheta_2^2\left[\vartheta_2\vartheta_0^5\left(\frac{1}{5}\right) + \vartheta_0\vartheta_2^5\left(\frac{1}{5}\right)\right], \\ 5\vartheta_0^2\vartheta_0^4\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_1^4\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_2\left(\frac{1}{5}\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{5}\right) - \vartheta_0^5\left(\frac{1}{5}\right)\left[\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3^5\left(\frac{1}{5}\right)\right. \\ \qquad \left. + \vartheta_0\vartheta_3\vartheta_2^5\left(\frac{1}{5}\right) - \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^5\left(\frac{1}{5}\right)\right] = c_4\vartheta_0^3\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^5\left(\frac{1}{5}\right). \end{cases}$$

Durch Elimination von c_4 ergeben sich dann wieder Gleichungen zwischen den Thetafunctionen mit gebrochenen Charakteristiken für die Nullwerthe der Argumente.

§ 78.

Verallgemeinerung des Hermite'schen Transformationsprincipes. Herstellung allgemeiner Thetarelationen. Einfacher Beweis der Prym'schen Thetaformeln.

Nachdem wir den Zusammenhang der neuen Functionen mit den früher entwickelten nachgewiesen und gezeigt haben, dass zwischen ihnen unendlich viele Beziehungen bestehen, wollen wir jetzt dazu übergehen, allgemeinere Beziehungen zwischen denselben zu entwickeln. Für die Aufstellung kann mit Erfolg von einer Verallgemeinerung des Hermite'schen Transformationsprincipes Gebrauch gemacht werden. Wir wollen die hierauf bezüglichen Sätze nicht in voller Allgemeinheit aufstellen, sondern begnügen uns mit den folgenden Bemerkungen. Die transformirte Thetafunction:

$$1)\quad f(v) = \vartheta_3(nv, n\tau)$$

leistet, als Function von v aufgefasst, den Gleichungen Genüge:

$$2)\quad \begin{cases} f\left(v + \frac{1}{n}\right) = f(v), \\ f(v+\tau) \quad = e^{-n\pi i(2v+\tau)} f(v). \end{cases}$$

Umgekehrt folgt, dass eine jede ganze transcendente Function von v, die zwei solchen Gleichungen Genüge leistet, bis auf eine Constante bestimmt ist. Zu einer jeden anderen transformirten Function kann ein analoger Satz entwickelt werden.

Ebenso folgt: Wenn eine ganze transcendente Function von v den Bedingungsgleichungen Genüge leistet:

$$3)\qquad \begin{cases} f\left(v+\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{2\pi i p}{n}} f(v), \\ f(v+\tau) \ = e^{-\pi i n(2v+\tau)} f(v), \end{cases}$$

so ist sie bis auf eine Constante bestimmt u. s. w.

Eine einfache Anwendung dieser Sätze liefert unmittelbar die Gleichungen:

$$4)\qquad \prod_{r_1} \vartheta\begin{bmatrix} \eta+0 \\ \eta_1+r_1 \end{bmatrix}(v) = c_1 \sum_{r_1} e^{-\frac{2\pi i \eta r_1}{n}} \prod_{r} \vartheta\begin{bmatrix} \zeta+r \\ \zeta_1+r_1 \end{bmatrix}(v),$$

$$5)\qquad \prod_{r_1} \vartheta\begin{bmatrix} \eta+0 \\ \eta_1+r_1 \end{bmatrix}(v) = c_2 \sum_{r_1} e^{-\frac{2\pi i \eta r_1}{n}} \vartheta^n\begin{bmatrix} \zeta+0 \\ \zeta_1+r_1 \end{bmatrix}(v),$$

$$6)\qquad \sum_{r_1} e^{\frac{2\pi i(\eta+\zeta)r_1}{n}} \vartheta^n\begin{bmatrix} \eta+0 \\ \eta_1+r_1 \end{bmatrix}(v) = c_3 \sum_{r_1} e^{\frac{2\pi i(\eta+\zeta)r_1}{n}} \vartheta^n\begin{bmatrix} \zeta+0 \\ \zeta_1+r_1 \end{bmatrix}(v).$$

Die Summen resp. Producte sind nach den entsprechenden Buchstaben von 0 bis $n-1$ zu nehmen. Die Constanten werden bestimmt, indem man dem Argumente einen bestimmten Werth beilegt.

Wir können aber auch nach einer etwas anderen Methode allgemeine Beziehungen zwischen unseren Thetafunctionen herleiten. In der That, es gilt der Satz, dass zwei Thetafunctionen n^{ter} Ordnung einander gleich sind, wenn sie denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten und für n von einander verschiedene Theilwerthe der Perioden einander gleich sind. Dieser Satz kann etwa in folgender Weise angewandt werden. Nehmen wir die Functionen:

$$7)\quad M = e^{\frac{2\pi i \eta}{n}(\zeta_1-\eta_1)} \sum_{r_1} \vartheta^n\begin{bmatrix} \eta+0 \\ \eta_1+r_1 \end{bmatrix}(0)\, \vartheta^n\begin{bmatrix} \eta+0 \\ \eta_1+r_1 \end{bmatrix}(v)\, e^{-\frac{2\pi i(\zeta+\eta)r_1}{n}},$$

$$8)\quad N = e^{\frac{2\pi i \zeta}{n}(\eta_1-\zeta_1)} \sum_{r_1} \vartheta^n\begin{bmatrix} \zeta+0 \\ \zeta_1+r_1 \end{bmatrix}(0)\, \vartheta^n\begin{bmatrix} \zeta+0 \\ \zeta_1+r_1 \end{bmatrix}(v)\, e^{-\frac{2\pi i(\zeta+\eta)r_1}{n}},$$

so stimmen dieselben mit einander überein für die Werthe:

$$-(\eta+\zeta)\frac{\tau}{n}-\frac{\eta_1+\zeta_1}{n},\quad -(\eta+\zeta)\frac{\tau}{n}-\frac{\eta_1+\zeta_1-1}{n},\ldots$$
$$-(\eta+\zeta)\frac{\tau}{n}-\frac{\eta_1+\zeta_1-n+1}{n},$$

so dass wir, da M und N überdies denselben Fundamentalgleichungen Genüge leisten, die Relation erhalten:

$$9)\qquad M=N.$$

Setzen wir ferner:

$$10)\quad M_1=e^{\frac{2\pi i\eta}{n}(\zeta_1-\eta_1)}\sum_r \vartheta^n\begin{bmatrix}\eta+r\\ \eta_1+0\end{bmatrix}(0)\,\vartheta^n\begin{bmatrix}\eta+r\\ \eta_1+0\end{bmatrix}(v)\,e^{\frac{2\pi i r(\eta-\zeta)}{n}},$$

$$11)\quad N_1=e^{\frac{2\pi i\zeta}{n}(\eta_1-\zeta_1)}\sum_r \vartheta^n\begin{bmatrix}\zeta+r\\ \zeta_1+0\end{bmatrix}(0)\,\vartheta^n\begin{bmatrix}\zeta+r\\ \zeta_1+0\end{bmatrix}(v)\,e^{\frac{2\pi i r(\eta_1-\zeta_1)}{n}},$$

so stimmen diese Ausdrücke überein für die Werthe:

$$-(\eta+\zeta)\frac{\tau}{n}-\frac{\eta_1+\zeta_1}{n},\quad -(\eta+\zeta-1)\frac{\tau}{n}-\frac{\eta_1+\zeta_1}{n},\ldots$$
$$-(\eta+\zeta-n+1)\frac{\tau}{n}-\frac{\eta_1+\zeta_1}{n}.$$

Hieraus folgt dann:

$$12)\qquad M_1=N_1.$$

So haben wir als unmittelbaren Ausfluss unserer Principien einige allgemeine Sätze gefunden. Dieselben lassen sich bedeutend vermehren, überdies durch Substitution von n^{tel} Perioden in allgemeinerer Form darstellen. Wir wollen hierauf nicht eingehen, vielmehr sofort ein Additionstheorem entwickeln, welches durch Specialisirung Formeln der genannten Art ergiebt und im Wesentlichen dasselbe für unsere allgemeinen Thetafunctionen leistet, was das in § 26 aufgestellte Additionstheorem für die gewöhnlichen Thetafunctionen leistet.

Wir setzen:

$$13)\qquad \begin{cases} nw_1=(1-n)v_1+v_2+\cdots v_{2n},\\ nw_2=v_1+(1-n)v_2+\cdots v_{2n},\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ nw_{2n}=v_1+v_2\cdots\cdots(1-n)v_{2n}\end{cases}$$

und bilden das Product:

$$\prod\vartheta_3(v_i),$$

wobei dasselbe nach i von 1 bis $2n$ zu nehmen ist, so leistet dieser Ausdruck, wenn er für den Augenblick als Function von v_i allein angesehen und als solcher durch $f(v_i)$ bezeichnet wird, den Gleichungen Genüge:

$$f(v_i+1)=f(v_i),$$
$$f(v_i+\tau)=f(v_i)e^{-\pi i(2v_i+\tau)}.$$

Durch diese Gleichungen ist unser Product bis auf eine von v_i unabhängige Constante bestimmt. Bilden wir weiter das Product:

$$\prod \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_i) e^{-\frac{2\pi i g h}{n}},$$

worin g, h alle Werthe von 0 bis $n-1$ annehmen können und das Product nach i von 1 bis $2n$ zu nehmen ist, so geht dasselbe als Function von v_i aufgefasst bei der Vermehrung von v_i um die Einheit in sich selber über.

Bezeichnen wir dasselbe als Function von v_i durch $\varphi(v_i)$, so gilt ferner die Gleichung:

$$\sum \varphi(v_i + \tau) = \sum \varphi(v_i) e^{-\pi i(2v_i + \tau)},$$

die Summe über alle g, h erstreckt.

Unter solchen Umständen erhalten wir die Gleichung:

$$\text{14)} \qquad \prod_i \vartheta_3(v_i) = c . \sum_{g,h} \prod_i \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_i) e^{-\frac{2\pi i g h}{n}}.$$

Die Constante c ist jedenfalls unabhängig von den Grössen v —, sie hängt aber auch nicht von τ ab. In der That, bezeichnen wir die linke Seite mit F, bilden die Differentialquotienten von F nach v und τ, so folgt:

$$\sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial v_i^2} = 4\pi i \frac{\partial F}{\partial \tau}.$$

Derselben Bedingung genügt die rechte Seite, so dass die Constante auch von τ unabhängig sein muss.

Setzen wir zu ihrer Bestimmung die Fourier'schen Entwickelungen der einzelnen Functionen ein, so wird:

$$1 = cn,$$

oder also wir erhalten das Additionstheorem:

$$\text{15)} \qquad n \prod_i \vartheta_3(v_i) = \sum_{g,h} \prod_i \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_i) e^{-\frac{2\pi i g h}{n}}.$$

In ähnlicher Weise folgt:

Setzt man:

$$\text{16)} \qquad \begin{cases} n w_1 = (2-n) v_1 + v_2 + \cdots 2 v_n, \\ n w_2 = 2 v_1 + (2-n) v_2 + \cdots 2 v_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n w_n = 2 v_1 + v_2 + \cdots (2-n) v_n, \end{cases}$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\text{17)} \qquad n \prod \vartheta_3(v_i) = \sum_{g,h} \prod_i \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_i) e^{\frac{n-1}{n} g h \pi i}.$$

Aus diesen beiden Additionstheoremen lassen sich durch Substitution von n^{tel} Perioden noch allgemeinere Formeln ableiten, von deren Aufstellung indessen abgesehen werden kann.

§ 79.[37])

Einführung neuer Fundamentalfunctionen.

Aus den Thetafunctionen mit gebrochener Charakteristik können nun durch einfache Operationen neue Functionen gebildet werden, welche sich für die gesammte Theorie der doppeltperiodischen Functionen von fundamentaler Bedeutung gezeigt haben. Wir gelangen zu ihnen, indem wir an Stelle von v und τ uns die Grössen nv und $n\tau$ eingesetzt denken. Dabei aber ergeben sich besonders einfache und merkwürdige Beziehungen, wenn wir uns $h = 0$ gesetzt denken. Das soll geschehen; dann gelangen wir zu den Functionen:

$$1)\qquad X_g^{(\alpha)} = \vartheta_\alpha(nv + g\tau, n\tau)e^{\pi i g\left(2v + \frac{g\tau}{n}\right)}.$$

Wir wollen nun die Einschränkung einführen, dass n eine ungerade Primzahl sei, weil dann die Untersuchungen besonders durchsichtig und einfach werden.

Die eingeführten Functionen können in einen engen Zusammenhang mit den repräsentirenden Thetafunctionen gebracht werden. In der That, wie aus der Summendarstellung unmittelbar folgt, gilt die Gleichung:

$$\vartheta_3(v, \tau) = \sum_0^{n-1}{}^g\, e^{2\pi i g v + \pi i g^2\tau}\,\vartheta_3(nv + ng\tau, n^2\tau).$$

Setzen wir rechts und links an Stelle der Grösse τ die Grösse:

$$\frac{\tau + 2\lambda}{n},$$

so wird:

$$2)\qquad \vartheta_3\left(v, \frac{\tau + 2\lambda}{n}\right) = \vartheta_3(nv, n\tau) + \sum_0^{\frac{n-1}{2}} e^{\frac{2\pi i g^2\lambda}{n}}(X_g^{(3)} + X_{-g}^{(3)}).$$

Wir finden also zunächst das wichtige Resultat, dass unsere repräsentirenden Thetafunctionen sich linear unter Hinzuziehung von n^{ten} Einheitswurzeln durch die Grössen $X_g^{(3)}$ ausdrücken lassen und zwar zunächst für den Index 3. Dass für die anderen Indices etwas Analoges gilt, braucht nicht weiter ausgeführt zu werden.

Dabei zeigt es sich, dass die neuen Functionen immer in der Verbindung:

$$X_g^{(3)} + X_{-g}^{(3)}$$

auftreten.

Durch Umkehrung erhalten wir:

$$3)\ e^{\frac{\pi i g^2 \tau}{n}} [e^{2\pi i g v} \vartheta_3(nv + g\tau, n\tau) + e^{-2\pi i g v} \vartheta_3(nv - g\tau, n\tau)] = X_g^{(3)} + X_{-g}^{(3)}$$
$$= \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_\lambda\, e^{-\frac{2\pi i g^2 \lambda}{n}} \vartheta_3\left(v, \frac{\tau + 2\lambda}{n}\right).$$

Es zeigt sich also, dass sich zwar die neuen Functionen selbst nicht, wohl aber einfache Verbindungen durch die repräsentirenden Thetafunctionen darstellen lassen. Setzen wir die Argumente gleich Null, so lassen sich aber die neuen Functionen selbst unmittelbar durch die transformirten Thetafunctionen ausdrücken. Hierin liegt eines der wichtigsten Momente für die Einführung derselben. In der Transformationstheorie hat es sich schliesslich als Aufgabe herausgestellt, zwischen ursprünglichen und transformirten Grössen für die Nullwerthe der Argumente Relationen herzustellen. Da sind wir denn berechtigt, an Stelle der transformirten Thetafunctionen die Grössen

$$e^{\frac{\pi i g^2 \tau}{n}} \vartheta_\alpha(g\tau, n\tau)$$

einzuführen und es als Aufgabe der Transformationstheorie zu bezeichnen, zwischen diesen Grössen Relationen allgemeiner Art zu entwickeln. Der grosse Vorzug, der hierbei eintritt, liegt darin, dass die allgemeinen Grössen mit beliebigen Argumenten, die durch Specialisirung unsere Grössen

$$e^{\frac{\pi i g^2 \tau}{n}} \vartheta_\alpha(g\tau, n\tau)$$

ergeben, allgemeinen leicht aufstellbaren Additionstheoremen Genüge leisten. Wir erhalten also Transformationsgleichungen durch Specialisirung von Additionstheoremen, so dass die Transformationstheorie im engeren Sinne keine eigenen immerhin complicirten und fremdartigen Methoden erfordert. Damit ist ein neues Moment in die ganze Theorie gebracht, welches sich von schwerwiegendster Bedeutung zeigen dürfte und weiterhin noch näher ausgeführt werden wird.

Die Beziehungen, die wir zwischen den repräsentirenden Thetafunctionen und den Grössen $X_g^{(\alpha)}$ gefunden haben, zeigen, dass zwischen den ersteren eine Reihe linearer Beziehungen bestehen müssen. Wir können dieselben schreiben:

$$4)\qquad n\vartheta_3(nv, n\tau) = \sum{}^{\lambda}\vartheta_3\left(v, \frac{\tau+2\lambda}{n}\right),$$

$$5)\qquad \sum \alpha^{\lambda}\vartheta_3\left(v, \frac{\tau+2\lambda}{n}\right) = 0,$$

sofern es sich um den Index 3 handelt. Für die übrigen Indices gelten ähnliche Beziehungen.

Die neuen Functionen sind aus den Thetafunctionen mit gebrochenen Charakteristiken entstanden, indem an Stelle von v, τ getreten ist $nv, n\tau$. Wir können daneben aber die folgenden Beziehungen zwischen diesen Grössen herstellen. Für ein ungerades n hatten wir die Beziehungen gefunden:

$$6)\quad \sqrt{n}\,.\,\vartheta_\alpha(nv, n\tau)\,\vartheta_0^{\frac{n-1}{2}}\,.\,\vartheta_2^{\frac{n-1}{2}}\,.\,\vartheta_3^{\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_\alpha(v)\prod\vartheta_1\left(\frac{2h}{n}\right)\vartheta_\alpha\left(\frac{2h}{n}+v\right)\vartheta_\alpha\left(\frac{2h}{n}-v\right),$$

wobei das Product nach α von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ zu nehmen ist.

Setzen wir in dieser Formel an Stelle von v:

$$v + \frac{g\tau}{n},$$

so ergiebt sich:

$$7)\quad \sqrt{n}\,X_g^{(\alpha)}\vartheta_0^{\frac{n-1}{2}}\,\vartheta_2^{\frac{n-1}{2}}\,\vartheta_3^{\frac{n-1}{2}} = \pm\, 2^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_\alpha\begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}(v)\prod\vartheta_1\left(\frac{2h}{n}\right)\vartheta_\alpha\begin{bmatrix} g \\ 2h \end{bmatrix}(v)\,\vartheta_\alpha\begin{bmatrix} g \\ -2h \end{bmatrix}(v).$$

Wir sehen also, dass unsere neuen Functionen sich, von einer Constanten abgesehen, als Producte von Thetafunctionen mit gebrochener Charakteristik darstellen lassen.

Eine weitere wichtige Eigenschaft unserer Grössen ist die, dass die Ausdrücke:

$$X_g^{\alpha}, \qquad g = 0, 1, \dots n-1$$

linear unabhängig von einander sind. Der Beweis folgt unmittelbar durch Substitution von n^{tel} Perioden.

Fügen wir zu dem Functionszeichen:

$$X_g^{(\alpha)}$$

das Argument v hinzu, d. h. sehen wir unsere Ausdrücke als Function von v an, so leisten sie den Gleichungen Genüge:

$$8)\qquad \begin{cases} X_g^{(\alpha)}(v+1) = \varepsilon_1 X_g^{(\alpha)}(v), \\ X_g^{(\alpha)}(v+\tau) = \varepsilon_2 e^{-\pi i n(2v+\tau)} X_g^{(\alpha)}(v), \end{cases}$$

wobei ε_1 und ε_2 den Werth ± 1 annehmen können, und zwar je nach der Wahl von α. Wir haben also, indem wir α die vier von einander verschiedenen Werthe beilegen, je n linear von einander unabhängige

Thetafunctionen n^{ter} Ordnung gefunden, die zu den verschiedenen Charakteristiken gehören. Somit erhalten wir den

Lehrsatz: Eine jede Thetafunction n^{ter} Ordnung lässt sich linear durch n unserer Functionen:

$$e^{\pi i g\left(2v+\frac{g\tau}{n}\right)}\vartheta_\alpha(nv+g\tau, n\tau)$$

darstellen.

Dieser Lehrsatz zeigt eine weitere wichtige Eigenschaft unserer Functionen, welche zur Einführung derselben geführt hat.

Zwischen den Grössen $X_g^{(\alpha)}$ besteht eine Reihe von quadratischen Relationen, die mehrfach in der Literatur untersucht worden sind. Für uns treten dieselben an Bedeutung zurück, da sie nur specielle Fälle allgemeiner Additionstheoreme sind. Wir wollen nur kurz auf dieselben eingehen, und zwar indem wir zeigen, dass sie auch als unmittelbarer Ausfluss unserer allgemeinen Transformationsprincipien gelten können.

In der That, es ist:

$$9)\qquad \begin{cases} X_g^{(\alpha)}\left(v+\frac{1}{n}\right) = \pm e^{\frac{2\pi i g}{n}} X_g^{(\alpha)}(v), \\ X_g^{(\alpha)}(v+\tau) = \pm e^{-n\pi i(2v+\tau)} X_g^{(\alpha)}(v). \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen bei einer bestimmten Combination der Vorzeichen die entsprechende Function bis auf eine Constante. Wir wollen $\alpha = 3$ setzen, d. h. in beiden Gleichungen das positive Vorzeichen wählen. Bilden wir dann das Product:

$$10)\qquad f(v) = X_g^{(3)} . X_{g_1}^{(3)},$$

so leistet dieses den Gleichungen Genüge:

$$11)\qquad \begin{cases} f\left(v+\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{2\pi i(g+g_1)}{n}} f(v), \\ f(v+\tau) \quad = e^{-2n\pi i(2v+\tau)} f(v). \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass zwischen je drei solchen Producten, bei denen $g+g_1$ den nämlichen Werth besitzt, je eine lineare Beziehung bestehen muss, oder also dass wir erhalten:

$$c_1 X_g^{(3)} X_{g_1}^{(3)} + c_2 X_{g_2}^{(3)} X_{g_3}^{(3)} + c_4 X_{g_4}^{(3)} X_{g_5}^{(3)} = 0,$$
$$g+g_1 = g_2+g_3 = g_4+g_5.$$

Das Analoge gilt für die anderen oberen Indices; also für den Index 1 würde sich auch ergeben:

$$12)\qquad c_1 X_g^{(1)} X_{g_1}^{(1)} + c_2 X_{g_2}^{(1)} X_{g_3}^{(1)} + c_3 X_{g_4}^{(1)} X_{g_5}^{(1)} = 0.$$

Die Constanten sind leicht zu bestimmen. Bezeichnen wir die Werthe von $X_g^{(\alpha)}$ für den Nullwerth des Argumentes v durch $x_g^{(\alpha)}$, und setzen zugleich:

$$v = -\frac{g\tau}{n},$$

so wird:

$$0 = c_2 x^{(1)}_{g_2-g} x^{(1)}_{g_3-g} + c_3 x_{g_4-g} x_{g_5-g}.$$

Genau so erhalten wir:

$$0 = c_1 x_{g-g_3} x_{g_1-g_3} + c_3 x_{g_4-g_3} x_{g_5-g_3}.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir für die Constanten die Werthe:

$$13)\quad \begin{cases} c_1 = x^{(1)}_{g_3-g_4} x^{(1)}_{g_2-g_5}, \\ c_2 = x^{(1)}_{g-g_4} x^{(1)}_{g_5-g}, \\ c_3 = x^{(1)}_{g_2-g} x^{(1)}_{g_3-g}. \end{cases}$$

Damit sind die quadratischen Relationen entwickelt.

§ 80.[38])

Additionstheoreme zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln.

Wir haben bemerkt, dass Beziehungen zwischen den Grössen:

$$e^{\frac{\pi i g^2 \tau}{n}} \vartheta_\alpha(g\tau, n\tau)$$

durch Specialisirung von Additionstheoremen gewonnen werden können. Es sollen jetzt diese Theoreme entwickelt werden. Unsere neuen Functionen erhielten wir aus Thetafunctionen mit gebrochener Charakteristik, bei denen $h = 0$ ist. Um eine einfachere Schreibweise zu erhalten, wollen wir setzen:

$$1)\quad \vartheta_\alpha \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} (v, \tau) = \vartheta_\alpha[g](v, \tau).$$

Es ist dann:

$$2)\quad X_g^{(\alpha)} = \vartheta_\alpha[g](nv, n\tau).$$

Bilden wir nun das Product:

$$3)\quad P = \prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau),$$

wo dasselbe nach ε von 1 bis n zu nehmen ist und $v_1, v_2, \ldots v_n$ beliebige von einander unabhängige Argumente bedeuten, so ist dasselbe in Bezug auf jedes der Argumente eine Thetafunction erster Ordnung mit der Charakteristik Null, welches überdies der Gleichung Genüge leistet:

$$4)\quad \sum \frac{\partial^2 P}{\partial v_\varepsilon^2} = 4\pi i \frac{\partial P}{\partial \tau}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass mit den Argumenten v_ε n andere Argumente w_ε durch die Gleichungen verbunden sind:

$$5)\qquad w_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \cdots a_{\varepsilon n} v_n; \qquad \varepsilon = 1, 2, \ldots n,$$

wobei die Grössen $a_{\varepsilon r}$ einstweilen völlig unbestimmte ganze Zahlen bedeuten und mit ihrer Hülfe das Product bilden:

$$\prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau).$$

Dasselbe kann, wenn g_ε und m_ε beliebige ganze Zahlen bedeuten, auch als Function der Grössen $v_1, \ldots v_n$ aufgefasst werden. Vermehren wir dann v_ε um 1 oder um τ, so geht dasselbe, von Exponentialfactoren abgesehen, in sich oder in Producte derselben Art über.

Unterwerfen wir nun die Zahlen a den Bedingungen:

$$6)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_{1r}^2}{m_1} + \dfrac{a_{2r}^2}{m_2} + \cdots \dfrac{a_{nr}^2}{m_n} = 1, \\ \dfrac{a_{1\varepsilon} \cdot a_{1r}}{m_1} + \dfrac{a_{2\varepsilon} \cdot a_{2r}}{m_2} + \cdots \dfrac{a_{n\varepsilon} \cdot a_{nr}}{m_n} = 0 \end{cases} \qquad \varepsilon \gtrless r$$

oder was dasselbe sagt den Bedingungen:

$$7)\qquad \begin{cases} a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots a_{\varepsilon n}^2 = m_\varepsilon, \\ a_{\varepsilon 1} \cdot a_{r1} + a_{\varepsilon 2} \cdot a_{r2} + \cdots a_{\varepsilon n} \cdot a_{rn} = 0, \end{cases}$$

und bilden die Summe:

$$\sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

so ist diese, als Function von v_ε aufgefasst, eine Thetafunction erster Ordnung von der Charakteristik Null, wenn sie über alle diejenigen g_ε nach den Moduln m_ε erstreckt wird, die den Congruenzen Genüge leisten:

$$8)\qquad \begin{cases} g_1 \equiv a_{11} s_1 + a_{12} s_2 + \cdots a_{1n} s_n \mod m_1, \\ g_2 \equiv a_{21} s_1 + a_{22} s_2 + \cdots a_{2n} s_n \mod m_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g^n \equiv a_{n1} s_1 + a_{n2} s_2 + \cdots a_{nn} s_n \mod m_n, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass die Zahlen s beliebige ganze Zahlen bedeuten. Diese Congruenzen sind gleichbedeutend damit, dass die Ausdrücke:

$$\frac{g_1 a_{1\varepsilon}}{m_1} + \frac{g_2 a_{2\varepsilon}}{m_2} + \cdots \frac{g_n a_n}{m_n}$$

ganze Zahlen sind. Der Beweis dieser Behauptung beruht vor allem auf den Formeln:

$$\vartheta_3[g_\varepsilon](v + m\tau, m\tau) = e^{-\pi i(2v + m\tau)} \vartheta_3[g_\varepsilon](v, m\tau),$$

$$\vartheta_3[g_\varepsilon](v + r\tau, m\tau) = e^{-\frac{\pi i}{m}(r^2\tau + 2rv)} \vartheta_3[g_\varepsilon + r](v, m\tau)$$

Hieraus folgt die Gleichung:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = c \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei c eine Grösse bedeutet, die von den Argumenten v unabhängig ist. Da aber die Summe der rechten Seite derselben Differentialgleichung Genüge leistet, wie das Product auf der linken Seite, so folgt, dass die Constante auch von τ unabhängig sein muss, mit anderen Worten, dass sie numerisch ist. Ihr Werth ergiebt sich unmittelbar durch Einsetzen der Reihen für die Thetafunctionen und zwar wird er gleich 1 oder also wir erhalten den

Lehrsatz: Leisten die ganzen Zahlen $a_{\varepsilon r}$ den vorhin aufgestellten Gleichungen Genüge, so findet das Additionstheorem statt:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_\varepsilon[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$w_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \cdots a_{\varepsilon n} v_n$$

und die Summe über alle $g_1, g_2, \ldots g_n$ zu erstrecken ist, die den Congruenzen Genüge leisten:

$$g_1 \equiv a_{11} s_1 + a_{12} s_2 + \cdots a_{1n} s_n \bmod m_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_n \equiv a_{n1} s_1 + a_{n2} s_2 + \cdots a_{nn} s_n \bmod m_n.$$

Dieses Additionstheorem kann nach doppelter Richtung hin verallgemeinert werden. Erstens ist es nicht nöthig, dass die Thetafunctionen auf der linken Seite alle den Modul τ haben, vielmehr kann die Annahme gemacht werden, dass der zu v_ε gehörende Modul gleich $\mu_\varepsilon \tau$ ist, wo μ_ε eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Da in der Discussion sich keinerlei neue Momente ergeben, so beschränken wir uns darauf, das Resultat anzugeben.

Lehrsatz: Es gilt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$w_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \cdots a_{\varepsilon n} v_n,$$
$$\mu_1 a_{\varepsilon 1}^2 + \mu_2 a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots \mu_n a_{\varepsilon n}^2 = m_\varepsilon,$$
$$\mu_1 \cdot a_{\varepsilon 1} a_{r1} + \mu_2 a_{\varepsilon 2} a_{r2} + \cdots \mu_n a_{\varepsilon n} a_{rn} = 0$$

und die Summe über alle $g_1, g_2, \ldots g_n$ zu erstrecken ist, die den Congruenzen Genüge leisten:

$$g_1 \equiv a_{11} \mu_1 s_1 + a_{12} \mu_2 s_2 + \cdots a_{1n} \mu_n s_n \bmod m_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_n \equiv a_{n1} \mu_1 s_1 + a_{n2} \mu_2 s_2 + \cdots a_{nn} \mu_n s_n \bmod m_n.$$

Eine zweite Verallgemeinerung tritt ein, wenn wir die Voraussetzung fallen lassen, dass $h = 0$ ist. Für die Zwecke, die hier zunächst ins Auge gefasst werden, genügt es, wenn wir nur specielle Werthe von h ins Auge fassen, wobei wir bemerken, dass irgend welche neue Gesichtspunkte oder Schwierigkeiten bei einem allgemeinen h nicht auftreten. Wir erhalten den

Lehrsatz: Es gilt das Additionstheorem:

$$2^{2n} \prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_3 \begin{bmatrix} g_\varepsilon \\ 2 \end{bmatrix} (w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$2w_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \cdots a_{\varepsilon n} v_n,$$

$$2\eta_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} \eta'_1 + a_{\varepsilon 2} \eta'_2 + \cdots a_{\varepsilon n} \eta'_n,$$

$$a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots a_{\varepsilon n}^2 = 4m_\varepsilon,$$

$$a_{\varepsilon 1} a_{r 1} + a_{\varepsilon 2} a_{r 2} + \cdots a_{\varepsilon n} a_{r n} = 0$$

oder auch:

$$\frac{a_{1\varepsilon}^2}{m_1} + \frac{a_{2\varepsilon}^2}{m_2} + \cdots \frac{a_{n\varepsilon}^2}{m_n} = 4,$$

$$\frac{a_{1\varepsilon} \cdot a_{1r}}{m_1} + \frac{a_{2\varepsilon} \cdot a_{2r}}{m_2} + \cdots \frac{a_{n\varepsilon} \cdot a_{nr}}{m_n} = 0.$$

Die Summe ist über alle η' gleich 0 und 1 zu erstrecken, ferner über alle g, die den Congruenzen

$$g_\varepsilon \equiv a_{\varepsilon 1} s_1 + a_{\varepsilon 2} s_2 + a_{\varepsilon n} s_n \mod 2m_\varepsilon$$

entsprechen.

Es können nun die beiden letzten Fälle vereinigt werden und ergeben dann eine vierte noch allgemeinere Form, von deren Aufstellung hier um so mehr abgesehen werden kann, als die wichtigsten Anwendungen erst in dem zweiten Bande dieses Werkes erfolgen werden.

§ 81.[89])

Summendarstellung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art.

Die von uns eingeführten Functionen können nun dazu dienen, um überdies wichtige neue Darstellungen der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art zu geben. Von einer einfachen Exponentialgrösse abgesehen, haben wir die doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art in die Form gebracht:

$$\frac{\vartheta_1(v-a_1)\,\vartheta_1(v-a_2)\ldots\vartheta_1(v-a_m)}{\vartheta_1(v-b_1)\,\vartheta_1(v-b_2)\ldots\vartheta_1(v-b_n)},$$

wobei m und n zwei beliebige ganze positive Zahlen bedeuten. An Stelle des Index 1 kann auch jeder andere Index treten. Wir wollen nun zunächst der Einfachheit halber annehmen, dass $b_1, b_2, \ldots b_n$ lauter von einander verschiedene Grössen sind. Um derartige Functionen als Summen einfacherer Ausdrücke darzustellen, denken wir uns eine transcendente ganze Function der Veränderlichen:

$$x = e^{2\pi i v}$$

vorgelegt, welche den Bedingungsgleichungen Genüge leistet:

$$1)\qquad \begin{cases} f(v+1) = f(v), \\ f(v+\tau) = f(v)e^{-\pi i n(2v+\tau)\quad 2w\pi i}. \end{cases}$$

Derartige Functionen lassen sich bekanntlich durch n linear von einander unabhängige ausdrücken, die denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten, und zwar können wir hierfür die Functionen wählen:

$$2)\quad \vartheta_3[g](nv+w, n\tau) = e^{-2\quad ig\left(v+\frac{w}{n}\right)+\frac{\pi i g^2\tau}{n}}\vartheta_3(nv+w-g\tau, n\tau).$$

Unter solchen Umständen können wir setzen:

$$3)\qquad f(v) = \sum c_g \vartheta_3[g](nv+w, n\tau),$$

wobei die c_g willkürliche Constanten bedeuten.

Die Darstellung kann aber noch in mannigfach anderer Weise geschehen. Nehmen wir an, dass b_1 und b_2 zwei beliebige Grössen sind, die aber nicht der Congruenz Genüge leisten:

$$b_1 \equiv b_2 \ mod\, m_1\tau + m_2,$$

so können wir die Grössen bilden:

$$\vartheta_3(v-b_\varepsilon)\vartheta_3[g]\,[(n-1)v+w+b_\varepsilon, (n-1)\tau]. \qquad \varepsilon = 1, 2$$

Lassen wir g der Reihe nach die Werthe durchlaufen $0, 1, \ldots n-2$, so folgt leicht, dass wir unter den definirten Grössen immer n von einander linear unabhängige wählen können. Hieraus folgt die Richtigkeit der Gleichung:

$$4)\quad f(v) = \sum c_g^{(1)}\vartheta_3(v-b_1)\vartheta_3[g]\,((n-1)v+w+b_1, (n-1)\tau) + c_g^{(2)}\vartheta_3(v-b_2)\vartheta_3[g]\,((n-1)v+w+b_2, (n-1)\tau).$$

Die Grössen $c_g^{(1)}$ und $c_g^{(2)}$ sind unbekannte Constanten. Wir können, wie nicht weiter auseinandergesetzt zu werden braucht, $(n-2)$ der Grössen $c_g^{(1)}$ oder auch der Grössen $c_g^{(2)}$ der Null gleich setzen, ohne der Allgemeinheit des Problems Abbruch zu thun.

In analoger Weise können wir weiter gehen. Sind b_1, b_2, b_3 drei willkürliche Grössen, von denen je zwei einander nicht nach dem Modul $m_1\tau + m_2$ congruent sein dürfen, so findet die Gleichung statt:

$$5)\ f(v) = \sum\sum c_g^{(\varepsilon,\varepsilon_1)}\vartheta_3(v-b_\varepsilon)\vartheta_3(v-b_{\varepsilon_1})\vartheta_3[g]\,[(n-2)v+w+b_\varepsilon+b_{\varepsilon_1},(n-2)\tau].$$
$$\varepsilon < \varepsilon_1,\ \varepsilon, \varepsilon_1 = 1, 2, 3.$$

Hierbei können wieder eine Reihe der Grössen c_g der Null gleich sein, ohne dass der Allgemeinheit des Problems Abbruch gethan wird. In ähnlicher Weise können wir weiter gehen. Als letzten Fall erhalten wir:

$$6)\ f(v) = \sum c^{(r)}\vartheta_3(v-b_1)\vartheta_3(v-b_2)\ldots\vartheta_3(v-b_{r-1})\vartheta_3(v-b_{r+1})\ldots$$
$$\vartheta_3(v-b_n)\vartheta_3(v+w+b-b_r),$$
$$b = b_1 + b_2 + \cdots b_n.$$

Hierbei bedeuten $b_1, b_2, \ldots b_n$ beliebige Grössen, von denen niemals je zwei einander nach dem Modul $m_1\tau + m_2$ congruent sein dürfen.

Ganz analoge Darstellungen würden wir erhalten, wenn wir die Gleichungen zu Grunde gelegt hätten:

$$f(v+1) = \pm f(v),$$
$$f(v+\tau) = \pm f(v)e^{-\pi i n(2v+\tau)-2w\pi i}.$$

Nehmen wir insbesondere den Fall:

$$7)\quad \begin{cases} f(v+1) = (-1)^n f(v), \\ f(v+\tau) = (-1)^n f(v)e^{-\pi i n(2v+\tau)-2w\pi i}, \end{cases}$$

so würden wir als letzte Gleichung die folgende wählen können:

$$8)\ f(v) = \sum c^{(r)}\vartheta_1(v-b_1)\ldots\vartheta_1(v-b_{r-1})\vartheta_1(v-b_{r+1})\ldots\vartheta_1(v-b_n)\vartheta_1(v+w+b-b_r).$$

Dividiren wir nun in Gleichung 3) beide Seiten durch $\vartheta_3(v-b_1)$, in der Gleichung 4) beide Seiten durch $\vartheta_3(v-b_1)\vartheta_3(v-b_2)$ etc. und schliesslich durch $\vartheta_3(v-b_1)\ldots\vartheta_3(v-b_{n-1})$, so erhalten wir auf den linken Seiten doppeltperiodische Functionen dritter Art, bei denen die Zahl der verschiedenen Unendlichkeitspunkte resp. gleich $1, 2, \ldots n-1$ ist und damit jedenfalls kleiner als die der Nullpunkte. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass wir auf diesem Wege zu Functionen gelangen, auf welche sich die allgemeinsten doppeltperiodischen Functionen mit lauter verschiedenen Unendlichkeitspunkten reduciren lassen.

Wir erhalten demgemäss den

Lehrsatz: Die doppeltperiodischen Functionen dritter Art, bei denen die Zahl der Nullpunkte grösser ist als die der Unendlichkeitspunkte, lassen sich linear aus Functionen von der Form zusammensetzen:

$$\frac{\vartheta_3[g](mv - b', m\tau)}{\vartheta_3(v - b, \tau)},$$

wobei $m - 1$ gleich der Differenz der Zahl der Null- und Unendlichkeitsstellen ist und die letzteren alle von einander verschieden sind.

Um die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art zu erhalten, dividiren wir in Formel 8) links und rechts durch $\vartheta_1(v - b_1)\,\vartheta_1(v - b_2) \ldots \vartheta_1(v - b_n)$ und erhalten den

Lehrsatz: Die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art mit lauter verschiedenen Unendlichkeitspunkten lassen sich linear aus den Functionen:

$$\frac{\vartheta_1(v - b')}{\vartheta_1(v - b)}$$

zusammensetzen.

In diesem wie in dem vorigen Lehrsatz ist von etwaigen Exponentialfactoren abgesehen. Der letzte Satz hätte auch in etwas anderer Form als specieller Fall des vorletzten aufgestellt werden können.

Die Bestimmung der Constanten ist im Allgemeinen zunächst mit Schwierigkeiten verbunden. Im ursprünglichen und im letzten Falle ist sie leicht durchzuführen.

Die ganzen transcendenten Functionen, sofern sie doppeltperiodische Functionen dritter Art sind, lassen sich, von einfachen Exponentialgrössen abgesehen, in die Form bringen:

$$\prod \vartheta_3(v - a_\varepsilon, \tau), \qquad \varepsilon = 1, \ldots n.$$

Nun hatten wir das Additionstheorem:

$$9) \qquad \prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei die bekannten Beziehungen bestehen. In diesem Additionstheorem setzen wir an Stelle der Grössen v_ε die Grössen $v_\varepsilon - a_\varepsilon$, so ergiebt sich:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon - a_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon - b_\varepsilon, m_\varepsilon \tau).$$

Nun können wir die Grössen $a_{\varepsilon r}$ stets den Bedingungsgleichungen gemäss bestimmen:

$$a_{11} + a_{12} + \cdots a_{1n} = n,$$

$$a_{\varepsilon 1} + a_{\varepsilon 2} + \cdots a_{\varepsilon n} = 0, \qquad \varepsilon > 1.$$

Der Beweis hierfür kann auf mehrfachem Wege geführt werden. Wir wollen hier folgendermassen verfahren. In den einfachsten Fällen

ist der Beweis klar. Nehmen wir nun an, dass n eine ungerade Zahl ist, so können wir setzen:

$$a_{11} = a_{12} = \cdots a_{1n} = 1, \quad m_1 = n,$$
$$a_{21} = n-1, \quad a_{22} = a_{23} = \cdots a_{2n} = -1, \quad m_2 = n(n-1),$$
$$a_{31} = a_{41} = \cdots a_{n1} = 0.$$

Damit ist aber, wie man sich leicht überzeugt, die Bestimmung der übrigen Zahlen auf den Fall zurückgeführt, dass die Zahl der Veränderlichen gleich $n-1$ d. h. eine gerade Zahl ist.

Ist aber n eine gerade Zahl gleich $2r$, so setzen wir:

$$a_{11} = a_{12} = \cdots a_{1n} = 1,$$
$$a_{21} = a_{22} = \cdots a_{2r} = 1, \quad a_{2r+1} = a_{2r+2} = \cdots a_{22r} = -1.$$

Dann folgt leicht, dass die Bestimmung der übrigen Grössen auf denjenigen Fall reducirt ist, in welchem die Zahl der veränderlichen Grössen gleich r ist, d. h. gleich der Hälfte der ursprünglichen.

Unterwerfen wir aber die Grössen $a_{\varepsilon r}$ den genannten Bedingungsgleichungen, so nimmt unser Additionstheorem die Form an:

$$10) \quad \prod \vartheta_3(v - a_\varepsilon, \tau) = \sum \vartheta_3[g_1](nv - b_1, n\tau) \prod_{\varepsilon=2}^{\varepsilon=n} \vartheta_3[g_\varepsilon](-b_\varepsilon, m_\varepsilon \tau).$$

Damit haben wir in diesem Falle die Darstellung der doppeltperiodischen Functionen dritter Art durch die von uns eingeführten Functionen gegeben.

Noch einfacher gestaltet sich die Bestimmung der Constanten in dem Falle der doppeltperiodischen Functionen zweiter Art. Nennen wir die Nullpunkte einer ganzen transcendenten Function, die den Gleichungen Genüge leistet:

$$11) \quad \begin{cases} f(v+1) = (-1)^n f(v), \\ f(v+\tau) = (-1)^n e^{-\pi i n(2v+\tau) - 2w\pi i} f(v), \end{cases}$$

$a_1, a_2, \dots a_n$, so wird dieselbe gleich:

$$f(v) = c\,\vartheta_1(v-a_1)\,\vartheta_1(v-a_2)\dots\vartheta_1(v-a_n),$$

wobei die Relation besteht:

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n + w = m \qquad (m \text{ ganze Zahl}).$$

Dann folgt:

$$12) \quad \frac{\vartheta_1(v-a_1)\,\vartheta_1(v-a_2)\dots\vartheta_1(v-a_n)}{\vartheta_1(v-b_1)\,\vartheta_1(v-b_2)\dots\vartheta_1(v-b_n)} = \sum c_r \frac{\vartheta_1(v-b_r+b-a)}{\vartheta_1(v-b_r)},$$

$$b = b_1 + b_2 + \cdots b_n,$$
$$a = a_1 + a_2 + \cdots a_n.$$

Multipliciren wir mit dem Nenner herüber und setzen $v = b_r$, so wird:

$$13)\quad c_r = \frac{\vartheta_1(b_r - a_1)\,\vartheta_1(b_r - a_2)\ldots\vartheta_1(b_r - a_n)}{\vartheta_1(b_r - b_1)\,\vartheta_1(b_r - b_{r-1})\,\vartheta_1(b_r - b_{r+1})\,\vartheta_1(b_r - b_n)\,\vartheta_1(b - a)}.$$

Diese Constantenbestimmung ist zuerst von Hermite gegeben worden. Hätten wir andere Zeichen gewählt, so hätten die Betrachtungen sich nur wenig modificirt, jedenfalls ist auch in den anderen Fällen eine explicite Darstellung möglich.

In dem Falle der allgemeinen doppeltperiodischen Functionen dritter Art mit mehr Null- als Unendlichkeitsstellen können andere Methoden nicht so einfacher Art angewandt werden, um die Constanten zu bestimmen, daneben aber können dieselben durch eine einfache Betrachtung auf die Functionen zweiter Art zurückgeführt werden, so dass auch hier eine explicite Darstellung möglich ist. In der That, nehmen wir an, dass n eine ungerade Zahl sei, so folgt:

$$\vartheta_3(nv, n\tau) = c\prod\vartheta_3\left(v + \frac{\varepsilon}{n}, \tau\right),$$

wo das Product nach ε von 0 bis $n - 1$ zu nehmen und c eine bekannte Constante ist. Sei nun eine doppeltperiodische Function dritter Art vorgelegt, bei welcher die Zahl der Nullpunkte grösser als die der Unendlichkeitspunkte ist, und die den Gleichungen Genüge leistet:

$$f(v+1) = f(v),$$
$$f(v+\tau) = f(v)e^{-\pi i n(2v+\tau) - 2w\pi i},$$

so bilden wir den Ausdruck:

$$F(v) = \frac{f(v)}{c.\prod\vartheta_3\left(v + \frac{\varepsilon}{n}, \tau\right)},$$

dann ist $F(v)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Art. Diese können wir dann in expliciter Weise durch Functionen von der Form darstellen:

$$\frac{\vartheta_3(v-a)}{\vartheta_3(v-b)},$$

wobei die Coefficienten leicht hinschreibbare bestimmte Grössen sind. Die Function $f(v)$ selbst wird dann in Ausdrücke von der Form zerfallen:

$$\frac{\vartheta_3(v-a)}{\vartheta_3(v-b)}\vartheta_3(nv, n\tau).$$

Nun gilt die Formel:

$$14)\quad \begin{cases} \vartheta_3(v, n\tau)\,\vartheta_3(w, m\tau) = \sum e^{\pi i(\mu^2 m\tau + 2\mu w)} \\ \vartheta_3[nw - mv + nm\mu\tau, nm(n+m)\tau]\,\vartheta_3[v + w + \mu m\tau, (n+m)\tau]. \end{cases}$$

Setzen wir in derselben an Stelle von $v: nv$, an Stelle von $w: v-a$, von $m: 1$, so wird:

$$\vartheta_3(v-a, \tau)\,\vartheta_3(nv, n\tau)$$
$$=\sum{}' \vartheta_3[\mu n][-na, n(n+1)\tau]\,\vartheta_3[\mu][(n+1)v-a, (n+1)\tau].$$

Damit aber ist die Reduction auf die früheren Functionen vollkommen zu Ende geführt, und wir können somit die explicite Bestimmung der Coefficienten als durchgeführt ansehen. Aehnlich wäre der Fall eines geraden n zu erledigen.

Zu gleicher Zeit geben aber die Betrachtungen, die wir soeben angestellt haben, die Möglichkeit, die doppeltperiodischen Functionen dritter Art, bei denen die Zahl der Nullpunkte kleiner als die der Unendlichkeitspunkte ist, aus gewissen einfacheren Functionen zusammenzusetzen. In der That, nehmen wir an, dass n Unendlichkeitspunkte mehr als Nullpunkte vorhanden sind und bezeichnen die vorgelegte doppeltperiodische Function durch $f(v)$, so ist jetzt:

$$f(v)\prod \vartheta_3\left(v+\frac{\varepsilon}{n}, \tau\right)$$

(n ungerade) eine doppeltperiodische Function zweiter Art, lässt sich also in expliciter Form aus Functionen

$$\frac{\vartheta_3(v-a, \tau)}{\vartheta_3(v-b, \tau)}$$

zusammensetzen. Hieraus folgt der

Lehrsatz: Die doppeltperiodischen Functionen dritter Art, bei denen n Unendlichkeitspunkte mehr als Nullpunkte vorhanden und die Unendlichkeitspunkte von einander verschieden sind, lassen sich linear in expliciter Weise durch die Grössen darstellen:

$$\frac{\vartheta_3(v-a, \tau)}{\vartheta_3(v-b, \tau)}\;\frac{1}{\vartheta_3(nv, n\tau)}.$$

Bei den letzten Betrachtungen war durchweg angenommen, dass die Wurzeln des Nenners alle von einander verschieden sind. Wird ein Theil derselben einander gleich, so modificiren sich die Resultate.

Bleiben wir zunächst bei den doppeltperiodischen Functionen zweiter Art stehen und nehmen an, dass im Nenner der Factor

$$\vartheta_1(v-b')^r$$

steht, so treten an Stelle des einen Summanden:

$$\frac{\vartheta_1(v - b' + b - a)}{\vartheta_1(v - b')}$$

deren r, die wir in der Summe zusammenfassen können:

$$\sum c_s \frac{d^s}{dv^s} \frac{\vartheta_1(v - b' + b - a)}{\vartheta_1(v - b')} \qquad s = 0, 1, \ldots r - 1.$$

Die Coefficienten sind zu bestimmen, indem man die linke Seite sich nach Potenzen von $v - b'$ entwickelt denkt. Die Coefficienten von $(v - b)^{-r}$, $(v - b')^{-r+1}, \ldots (v - b')^{-1}$ sind dann, von einfachen Zahlfactoren abgesehen, resp. gleich:

$$c_{r-1}, \quad c_{r-2}, \ldots c_0.$$

Dabei muss dann ferner in dem Ausdruck für b die Grösse b' r-mal gesetzt werden.

In ähnlicher Weise muss bei den doppeltperiodischen Functionen dritter Art verfahren werden, nur dass bei ihnen nach den Parametern b und b' zu differenziren ist.

§ 82.[40])

Neue Darstellungen der doppeltperiodischen Functionen erster Art. Einführung der Function $\zeta(u)$.

Die Summendarstellung der doppeltperiodischen Functionen zweiter Art wird im Grenzfalle der Functionen erster Art hinfällig, da wir in demselben Ausdrücke von der Form erhalten:

$$\frac{\vartheta_1(v - b_r + b - a)}{\vartheta_1(b - a) \cdot \vartheta_1(v - b_r)} \qquad b = a.$$

Nach den Regeln der Differentialrechnung würden sich demnach Primfunctionen von der Form ergeben:

$$\frac{\vartheta_1'(v - b_r)}{\vartheta_1(v - b_r)}.$$

Dass dieses Resultat wirklich richtig ist, zeigt eine einfache direkte Ueberlegung. Nehmen wir an, dass eine doppeltperiodische Function erster Art vorgelegt sei:

$$1) \qquad f(v) = \frac{\vartheta_1(v - a_1) \ldots \vartheta_1(v - a_n)}{\vartheta_1(v - b_1) \ldots \vartheta_1(v - b_n)},$$

welche den Gleichungen Genüge leistet:

$$2) \qquad \begin{cases} f(v + 1) = f(v) \\ f(v + \tau) = f(v), \end{cases}$$

wobei die Grössen $b_1, b_2, \ldots b_n$ alle von einander verschieden sein mögen. Bilden wir dann die Summe:

3) $$F(v) = c_0 + \sum_{r=1}^{r=n} c_r \frac{\vartheta_1'(v - b_r)}{\vartheta_1(v - b_r)},$$

so hat diese dieselben Unendlichkeitspunkte wie $f(v)$. Setzen wir überdies fest, dass:

$$\sum_1^n c_r = 0$$

ist, so leistet die Function $F(v)$ auch den Gleichungen Genüge:

$$F(v + 1) = F(v),$$
$$F(v + \tau) = F(v).$$

Die Zahl der willkürlichen Constanten ist n, wir können dieselben stets in einfachster Weise so bestimmen, dass unsere Function dieselben Nullpunkte hat wie $f(v)$ oder also wir finden:

4) $$f(v) = c_0 + \sum c_r \frac{\vartheta_1'(v - b_r)}{\vartheta_1(v - b_r)}.$$

Genau so kann der allgemeine Fall erledigt werden. Nehmen wir an, dass die doppeltperiodische Function erster Art vorgelegt sei:

5) $$f(v) = \frac{\vartheta_1(v - a_1)\ldots\vartheta_1(v - a_n)}{\vartheta_1(v - b_1)^{m_1}\ldots\vartheta_1(v - b_s)^{m_s}},$$
$$n = m_1 + m_2 + \cdots m_s,$$

bei welcher die Grössen $b_1, \ldots b_s$ jetzt alle von einander verschieden sind und zwischen den Null- und Unendlichkeitsstellen die bekannten Beziehungen bestehen, so wird sich die Darstellung ergeben:

6) $$f(v) = c_0 + \sum\sum c_\sigma^\varrho \frac{d^\varrho \dfrac{\vartheta_1'(v - b_\sigma)}{\vartheta_1(v - b_\sigma)}}{dv^\varrho}, \quad \begin{array}{l}\sigma = 1, 2, \ldots s\\ \varrho = 0, 1, \ldots m_\sigma - 1.\end{array}$$

Die Coefficienten c_σ^ϱ bestimmen sich genau so wie die entsprechenden bei Functionen zweiter Art durch Entwickelung der linken Seite um die einzelnen Unendlichkeitspunkte. So kommen wir zu neuen Functionen:

$$\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}.$$

Ebenso würden sich drei andere Functionen ergeben:

$$\frac{\vartheta_\alpha'(v)}{\vartheta_\alpha(v)},$$

die aber als wesentlich verschieden von der ersten nicht angesehen werden können. Wir können sagen, dass von den vier Functionen eine als wesentlich neu aufzufassen ist, während die anderen dann auf

bekannte Functionen zurückgeführt werden können. Es geschieht das vermöge der Relation:

$$\frac{\vartheta'_\alpha(v)}{\vartheta_\alpha(v)} - \frac{\vartheta'_\beta(v)}{\vartheta_\beta(v)} = \frac{d \log \frac{\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_\beta(v)}}{dv}.$$

Die neu eingeführten Functionen haben sich von grosser Bedeutung gezeigt. Es folgen für sie eine Reihe von Eigenschaften, unter welchen wir die folgenden herausgreifen.

Wir hatten die Formel:

$$-k^2 sn^2 u = \frac{d^2 \log \vartheta_0(v) e^{-\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{du^2}$$

oder also wir erhalten:

$$\frac{1}{k^2}\frac{d \log \vartheta_0(v)}{du} = \frac{1}{\pi^2 \vartheta_3^4 k^2}\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} u - \int_0^u sn^2 u \,.\, du.$$

Wir wollen nun setzen:

$$7) \qquad \zeta(u) = \frac{1}{\pi^2 k^2 \vartheta_3^4}\frac{\vartheta''_0}{\vartheta_0} u - \frac{1}{k^2}\frac{d \log \vartheta_0(v)}{du},$$

so ist klar, dass die Theorie der doppeltperiodischen Functionen erster Art auch auf die Theorie der Function $\zeta(u)$ zurückgeführt werden kann.

Diese Function $\zeta(u)$ nun leistet einem ungemein einfachen Additionstheorem Genüge.

In der That, bilden wir den Ausdruck:

$$\zeta(u+u_1) + \zeta(u-u_1) - 2\zeta(u),$$

so wird derselbe gleich:

$$-\frac{1}{k^2}\frac{d}{du}\log\frac{\vartheta_0(v+v_1)\vartheta_0(v-v_1)}{\vartheta_0^2(v)} = -\frac{1}{k^2}\frac{d}{du}\log\frac{\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(v_1) - \vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(v_1)}{\vartheta_0^2(v)}$$

$$= -\frac{1}{k^2}\frac{d}{du}\log\frac{\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(v_1) - \vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(v_1)}{\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(v_1)} = -\frac{1}{k^2}\frac{d}{du}\log(1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 u_1)$$

$$= \frac{2 sn^2 u_1 . snu . cnu . dnu}{1 - k^2 . sn^2 u . sn^2 u_1}.$$

Aehnlich folgt:

$$\zeta(u+u_1) - \zeta(u-u_1) - 2\zeta(u_1) = \frac{2 sn^2 u . snu_1 . cnu_1 . dnu_1}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 u_1}.$$

Unter solchen Umständen ergiebt sich das Additionstheorem:

$$8) \qquad \zeta(u+u_1) = \zeta(u) + \zeta(u_1) + snu . snu_1 . sn(u+u_1).$$

Im Anschluss an die Summendarstellung der doppeltperiodischen Functionen erster Art geben wir noch eine zweite wichtige Darstellung derselben.

Nehmen wir an, dass die Function vorgelegt sei:

$$f(v) = \vartheta_1(v - a_1)\vartheta_1(v - a_2)\ldots\vartheta_1(v - a_n),$$
$$a_1 + a_2 + \cdots a_n = 0,$$

so können wir dieselbe, wenn n gerade ist, setzen:

$$f(v) = F^{\frac{n}{2}}[\vartheta_1^2(v),\ \vartheta_0^2(v)] + \vartheta_0(v)\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)F^{\frac{n-4}{2}}[\vartheta_1^2(v),\ \vartheta_0^2(v)],$$

wenn n ungerade ist:

$$f(v) = \vartheta_1(v)F^{\frac{n-1}{2}}[\vartheta_1^2(v),\ \vartheta_0^2(v)] + \vartheta_0(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)F^{\frac{n-3}{2}}[\vartheta_1^2(v),\ \vartheta_0^2(v)].$$

Hieraus folgt, dass:

$$\frac{\vartheta_1(v - a_1)\vartheta_1(v - a_2)\ldots\vartheta_1(v - a_n)}{\vartheta_1^n(v)}$$

sich rational aus sn^2u und $snu.cnu.dnu$ zusammensetzen lässt.

Nehmen wir nun an, dass irgend eine doppeltperiodische Function erster Art vorgelegt sei, so können wir dieselbe schreiben:

$$\frac{\vartheta_1(v - a_1)\vartheta_1(v - a_2)\ldots\vartheta_1(v - a_n)}{\vartheta_1(v - b_1)\vartheta_1(v - b_2)\ldots\vartheta_1(v - b_n)}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n = b_1 + b_2 + \cdots b_n = A = B.$$

Wir können die vorgelegte Function aber auch als Quotienten zweier anderen darstellen und zwar der folgenden:

$$\frac{\vartheta_1(v - a_1)\cdots\vartheta_1(v - a_n)\,\vartheta_1(v + A)}{\vartheta_1^{n+1}(v)},$$

$$\frac{\vartheta_1(v - b_1)\cdots\vartheta_1(v - b_n)\,\vartheta_1(v + B)}{\vartheta_1^{n+1}(v)}.$$

Hieraus folgt der

Lehrsatz: Eine jede doppeltperiodische Function erster Art lässt sich rational aus sn^2u und $snu\,.\,cnu\,.\,dnu$ zusammensetzen.

§ 83.

Die Entwickelung der speciellen doppeltperiodischen Functionen zweiter Art in Potenzreihen.

Wir haben die gesammten doppeltperiodischen Functionen zweiter Art auf gewisse specielle Functionen zurückgeführt. Es möge zunächst das Problem behandelt werden, diese Grundfunctionen in Potenzreihen zu entwickeln. Hierbei können wir annehmen, dass der Nenner das Argument v habe, der Zähler wird dann das Argument $v + a$ besitzen. Es bleiben vier Fälle zu unterscheiden übrig, je nachdem der Index

der ϑ-Function im Nenner die Werthe 0, 1, 2, 3 annimmt. Im Zähler ist es gleichgültig, welchen Index wir wählen, da in demselben die willkürliche Constante a vorkommt. Wir wollen zunächst den Quotienten ins Auge fassen:

$$\frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)}.$$

Bei den letzten Untersuchungen ist vielfach von dem Exponentialfactor abgesehen worden, der bei den Functionen zweiter Art noch auftreten kann. Im vorliegenden Falle gestaltet sich die Untersuchung besonders einfach, wenn wir einen solchen Exponentialfactor hinzunehmen, und zwar wollen wir die Function betrachten:

$$1)\qquad \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}v}.$$

Um die Entwickelung derselben in Potenzreihen zu erhalten, gehen wir folgendermassen vor.

Setzen wir:

$$2)\qquad \varphi(v) = \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(a)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}v},$$

so wird:

$$\frac{\partial \log \varphi(v)}{\partial v} = \frac{\partial \log \vartheta_1(v+a)}{\partial v} - \frac{d \log \vartheta_0(a)}{d a},$$

$$\frac{\partial \log \varphi(v)}{\partial a} = \frac{\partial \log \vartheta_1(v+a)}{\partial a} - \frac{d \log \vartheta_0(a)}{d a} - v\frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{d a^2}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir die Relation:

$$3)\qquad \frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} - \frac{\partial \varphi(v)}{\partial a} = v\,\varphi(v)\,\frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{d a^2}.$$

Wir können nun die Entwickelung ansetzen:

$$4)\qquad \varphi(v) = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + \cdots c_n v^n + \cdots$$

und erhalten vermöge der letzten Differentialgleichung die Beziehung:

$$5)\qquad (n+1)\,c_{n+1} - \frac{d c_n}{d a} - c_{n-1}\frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{d a^2} = 0.$$

Der Factor

$$\frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{d a^2}$$

gestaltet die Berechnung der Grössen c etwas unübersichtlich. Wir kommen zu einfacheren Resultaten, wenn wir die Function betrachten:

$$6)\qquad \psi(v) = \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(a)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}},$$

dann wird die Differentialbeziehung:

$$7)\qquad \frac{\partial \log \psi(v)}{\partial v} - \frac{\partial \log \psi(v)}{\partial a} = v\left(\frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{d a^2} - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right).$$

Machen wir daher den Ansatz:

$$8)\qquad \psi(v) = c_0' + c_1' v + \cdots$$

so ergiebt sich die Beziehung:

$$9)\qquad (n+1) c_{n+1}' - \frac{d c_n'}{d a} - c_{n-1}' \left(\frac{d^2 \log \vartheta_0(a)}{d a^2} - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right) = 0.$$

Noch durchsichtiger gestalten sich die Resultate, wenn wir die Argumente der elliptischen Functionen einführen, d. h. setzen:

$$u = \pi \vartheta_3^2 v, \quad \alpha = \pi \vartheta_3^2 a.$$

Dann ergiebt sich:

$$10)\qquad \frac{\partial \log \psi(v)}{\partial u} - \frac{\partial \log \psi(v)}{\partial \alpha} = k^2 u \frac{d \zeta(\alpha)}{d \alpha}.$$

Die ersten Coefficienten in der Entwickelung sind unmittelbar bekannt. Das constante Glied wird:

$$\sqrt{k}\, sn\, \alpha,$$

der Factor von u:

$$\sqrt{k}\, cn\, \alpha . dn\, \alpha.$$

Hieraus folgt der

Lehrsatz: Die Function:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(a)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}$$

lässt sich nach Potenzen von u entwickeln. Die Coefficienten setzen sich ganz und rational aus $sn\,\alpha$ und $cn\,\alpha . dn\,\alpha$ zusammen. Als Constante tritt die Grösse k^2 ganz und rational auf.

Ferner haben wir gefunden, dass die Function:

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0(v)} e^{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}$$

sich nach Potenzen von u entwickeln lässt, so zwar, dass die Coefficienten sich ganz und rational aus k^2 zusammensetzen lassen, und zwar wird:

$$11)\qquad \frac{\vartheta_0}{\vartheta_0(v)} e^{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}} = 1 + e_2 u^2 + e_4 u^4 + \cdots$$

$$e_2 = 0, \quad e_4 = \frac{2k^2}{4!}, \quad e_6 = -\frac{8(k^2+k^4)}{6!}, \quad e_8 = \frac{32(k^2+k^6)+348k^4}{8!}, \cdots$$

Durch Multiplication ergiebt sich der

Lehrsatz: Die Function:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_0\,.\,\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)\,.\,\vartheta_0(a)}\,e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}v}$$

lässt sich nach steigenden Potenzen von u entwickeln. Die Coefficienten sind ganze rationale Functionen von $sn\,\alpha$ und $cn\,\alpha\,.\,dn\,\alpha$, die als Constante die Grösse k^2 ganz und rational enthalten.

Setzen wir die Reihe gleich:

$$b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 + \cdots$$

so wird:

$$b_0 = sn\,\alpha,\quad b_1 = cn\,\alpha\,.\,dn\,\alpha,\quad b_2 = \frac{sn\,\alpha\,(-1-k^2+k^2 sn^2\alpha)}{2},$$

$$b_3 = \frac{cn\,\alpha\,.\,dn\,\alpha\,(-1-k^2+k^2 sn^2\alpha)}{3!},$$

$$b_4 = \frac{sn\,\alpha\,[4k^2+(1+k^2-k^2 sn^2\alpha)^2]}{4!},$$

$$b_5 = \frac{cn\,\alpha\,.\,dn\,\alpha\,[12k^2+(1+k^2-k^2 sn^2\alpha)^2]}{5!}$$

. . . .

So haben wir eine Methode angegeben, mit deren Hülfe eine ganz bestimmte Function in Potenzreihen entwickelt werden kann. Aus dieser Entwickelung ergeben sich nun mit Hülfe der Substitution halber Perioden und der linearen Transformation sofort die Entwickelungen einer Reihe weiterer Primfunctionen.

In der That, wir sind berechtigt, links und rechts a um halbe Perioden zu vermehren. Wir erhalten auf diesem Wege — wie schon angedeutet — die Entwickelung dreier anderen Quotienten in Potenzreihen von u. Ferner zeigt sich aber auch die lineare Transformation von Bedeutung.

In der That, setzen wir links und rechts an Stelle von v und τ die Grössen v' und τ', die durch die Gleichungen definirt sind:

$$\tau' = \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1},\quad v' = (a_0 + a_1\tau')v = \frac{v}{b_1 - a_1\tau},$$

wobei a_0, b_0, a_1, b_1 zu einer linearen Transformation gehören, so finden Uebergänge von der Form statt:

$$F.\vartheta_1(v', \tau') = c.\varepsilon_1.\vartheta_1(v, \tau),$$
$$F.\vartheta_0(v', \tau') = c.\varepsilon_0.\vartheta_\alpha(v, \tau),$$
$$F.\vartheta_2(v', \tau') = c.\varepsilon_2.\vartheta_\beta(v, \tau),$$
$$F.\vartheta_3(v', \tau') = c.\varepsilon_3.\vartheta_\gamma(v, \tau),$$
$$F = e^{i\pi(a_0 + a_1\tau')a_1 v^2},$$

wobei c die allen Thetafunctionen gemeinsame Constante und $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ bekannte achte Einheitswurzeln bedeuten. Demgemäss geht der Quotient:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_0.\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v).\vartheta_0(a)}e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}v}$$

über in den Quotienten:

$$\frac{\vartheta_\alpha.\vartheta_\gamma}{\vartheta_\beta}.\frac{\varepsilon_1.\varepsilon_3}{\varepsilon_0.\varepsilon_2}\frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_\alpha(v)\vartheta_\alpha(a)}e^{-\frac{\vartheta_\alpha'(a)}{\vartheta_\alpha(a)}v},$$

während die Potenzreihe für den ersten Ausdruck in eine solche für den zweiten übergeht.

Auf diesem Wege können wir aus der ursprünglichen Reihe fünf andere herleiten, die mit derselben zu je zweien zu der nämlichen Function gehören und infolgedessen Bedingungsgleichungen ergeben, denen die Entwickelungscoefficienten Genüge leisten.

Setzen wir z. B.:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1,$$

so folgt:

Die Entwickelung von:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_0.\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)\vartheta_0(a)}e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}v}$$

nach Potenzen von u bleibt ungeändert, wenn an Stelle von:

$$u,\ sn\,\alpha,\ cn\,\alpha,\ dn\,\alpha,\ \sqrt{k}$$

der Reihe nach gesetzt wird:

$$ku,\ k\,sn\,\alpha,\ dn\,\alpha,\ cn\,\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Die Functionen, die sich auf diese Weise ergeben, haben die Eigenthümlichkeit, dass im Nenner niemals die Function $\vartheta_1(v)$ zu stehen kommt. In der That modificiren sich auch in einem solchen Falle die Resultate, wenn auch die Methode dieselbe bleibt. Die Entwickelung der reciproken ϑ_1-Function hat die Form:

$$\frac{\sqrt{k}.\vartheta_0.e^{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\frac{v^2}{2}}}{\vartheta_1(v)} = \frac{1}{u} + c_1.u + c_2.u^3 + \cdots,$$

so dass wir das Resultat erhalten:

Die Function:

$$\frac{\vartheta_0 . \vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(a) . \vartheta_1(v)} . e^{-\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} v} - \frac{sn\,\alpha}{u}$$

lässt sich in der früheren Weise nach Potenzen von u entwickeln.

Zu ähnlichen Resultaten kann man auf folgendem Wege gelangen. Setzt man:

$$f(v) = \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} v},$$

so ist der Ausdruck:

$$\vartheta_0^2(v)[\vartheta_1^2(v) - \vartheta_0^2(v)] \frac{df(v)}{du}$$

eine doppeltperiodische Function dritter Art, deren charakteristische Gleichungen unmittelbar hingeschrieben werden können. Wenden wir die alten Betrachtungsformen an, so können wir setzen:

$$12)\quad \begin{aligned}(sn^2 u - sn^2\alpha)\frac{df(v)}{du} &= f(v)(c_1 + c_2 sn^2 u + c_3 sn\,u . cn\,u . dn\,u) \\ &= f(v)(sn\,u\,cn\,u\,dn\,u - sn\,\alpha . cn\,\alpha . dn\,\alpha).\end{aligned}$$

Analog ergiebt sich für den zweiten Differentialquotienten der Ausdruck:

$$13)\quad \frac{d^2 f(v)}{dv^2} = f(v)(2k^2 sn^2 u - 1 - k^2 + k^2 sn^2\alpha).$$

Diese Gleichungen lehren die Richtigkeit des Lehrsatzes kennen:

Lehrsatz: Die sämmtlichen Differentialquotienten der Function $f(v)$ nach u lassen sich als Product von $f(v)$ und einer rationalen Function von $sn\,u$ und $cn\,u . dn\,u$ darstellen. Die Coefficienten setzen sich rational aus $sn\,\alpha$ und $cn\,\alpha . dn\,\alpha$ zusammen, während als Constante die Grösse k^2 rational auftritt. Der Nenner ist, wo er vorhanden ist, gleich $sn^2 u - sn^2\alpha$.

Man kann die hierbei auftretenden Gesetze noch näher specialisiren, indessen gehen wir darauf nur kurz ein. Jedenfalls findet eine Gleichung von der Form statt:

$$14)\quad \frac{d^{2n-2} f(v)}{du^{2n-2}} + f_{n-1,1}(u)\frac{df(v)}{du} + f_{n-1,2}(u) f(v) = 0,$$

wobei gesetzt ist:

$$15)\quad \begin{cases} f_{n-1,1}(u) = sn\,u . cn\,u . dn\,u \sum_0^{n-3}{}^r c_{r,n-1}\, sn^{2r} u, \\ f_{n-1,2}(u) = \sum d_{r,n-1}\, sn^{2r} u. \end{cases}$$

Durch zweimaliges Differenziren erhalten wir hieraus Recursionsformeln für die Grössen c und d, die aber nicht weiter aufgestellt werden mögen. Aehnliches gilt für die ungeraden Differentialquotienten.

Wenn wir aber die Differentialquotienten kennen, so kennen wir auch die Entwickelung der Function $f(v)$ in eine Potenzreihe. Dabei braucht kaum bemerkt zu werden, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung direct Recursionsformeln für die Entwickelungscoefficienten giebt, wie an einem analogen Falle sofort ausführlich gezeigt werden soll.

Betrachten wir nämlich die Function:

$$\varphi(v) = \frac{\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_1(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} v}, \tag{16}$$

so können wir den Ansatz machen:

$$\varphi(v) = \frac{c}{u}(1 + A_1 u^2 + A_2 u^3 + \cdots). \tag{17}$$

Die Function $f(v)$ leistete der Gleichung Genüge:

$$\frac{d^2 f(v)}{du^2} = f(v)(2k^2 sn^2 u - 1 - k^2 + k^2 sn^2 \alpha).$$

Entwickeln wir beide Seiten nach Potenzen von $v + \frac{\tau}{2}$ oder, was dasselbe sagt, nach Potenzen von $u + iK'$ und setzen:

$$\frac{1}{sn^2 u} = \frac{1}{u^2} + d_0 + d_2 u^2 + \cdots, \tag{18}$$

so folgen durch Coefficientenvergleichung erstens die Formen:

$$\left\{\begin{aligned}
-2A_1 &= k^2 sn^2 \alpha - \frac{1+k^2}{3},\\
-3A_2 &= k^2 sn\,\alpha\,.\,cn\,\alpha\,.\,dn\,\alpha,\\
-8A_3 &= k^4 sn^4 \alpha - \frac{2(k^2+k^4)}{3} sn^2 \alpha - \frac{7 - 22k^2 + 7k^4}{45},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-A_{2r} &= \frac{k^2 sn\,\alpha\,.\,cn\,\alpha\,.\,dn\,\alpha}{g_{2r}} (k^{2r-2} sn^{2r-2}\alpha + a_{2r}^{(4)} k^{2r-4} sn^{2r-4}\alpha\\
&\qquad + a_{2r}^{(6)} k^{2r-6} sn^{2r-6}\alpha + \cdots),\\
-A_{2r+1} &= \frac{1}{g_{2r+1}} (k^{2r+2} sn^{2r+2}\alpha + a_{2r+1}^{(2)} k^{2r} sn^{2r}\alpha + a_{2r+1}^{(4)} k^{2r-2} sn^{2r-2}\alpha + \cdots),
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

wobei die Grössen g_{2r} und g_{2r+1} leicht zu bestimmende ganze positive Zahlen sind und die Zahlen a sich ganz und rational aus k^2 zusammensetzen lassen.

Andererseits erhalten wir die Recursionsformeln:

$$20)\quad \begin{cases} [2r(2r-1)-2]\,A_{2r} = \left(k^2 sn^2 \alpha - \frac{1+k^2}{3}\right) A_{2r-2} \\ \qquad\qquad + 2d_2\, A_{2r-4} + \cdots 2d_{2r-4}\, A_2, \\ [2r(2r+1)-2]\,A_{2r+1} = \left(k^2 sn^2 \alpha - \frac{1+k^2}{3}\right) A_{2r-1} \\ \qquad\qquad + 2d_2\, A_{2r-3} + \cdots 2d_{2r-2}\, A_1 + 2d_{2r}, \end{cases}$$

aus denen sich die Coefficienten der Reihe nach berechnen lassen.

§ 84.

Entwickelung allgemeiner doppeltperiodischer Functionen zweiter Art in Potenzreihen.

Vermöge der zuletzt angegebenen Methoden und der früheren Darstellung der allgemeinen doppeltperiodischen Functionen zweiter Art durch gewisse Grundfunctionen sind wir im Stande, auch die allgemeinen Functionen zweiter Art in Potenzreihen zu verwandeln. Nichtsdestoweniger kann es in einigen Fällen von Bedeutung sein, auf anderem Wege Reihenentwickelungen herzustellen. Wir wollen einige hierauf bezügliche Sätze angeben.

Nehmen wir die Function:

$$1)\qquad \Phi(v) = \prod \frac{\vartheta_1(v+a_r)\, e^{-\frac{\vartheta_0'(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v}}{\vartheta_0(v)},$$

wobei das Product nach r von 1 bis m zu nehmen ist, so können wir die Entwickelung derselben erhalten, indem wir die früheren Entwickelungen mit einander multipliciren. Jedenfalls erhalten wir eine Darstellung von der Form:

$$2)\qquad \Phi(v) = C\left(\frac{1}{u}\right)^m (1 + K_2 u^2 + K_3 u^3 + \cdots),$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$K_2 = \sum A_1^{(i)},$$
$$K_3 = \sum A_2^{(i)},$$
$$K_4 = \sum A_3^{(i)} + \sum A_1^{(i)} . A_1^{(i')},$$
$$K_5 = \sum A_4^{(i)} + \sum A_1^{(i)} . A_2^{(i')},$$

. . . .

Die oberen Indices der Grössen A bedeuten, dass sie den Argumenten a_l entsprechen. Die Summen sind nach l resp. l' in bekannter Weise zu nehmen.

Jedenfalls folgt, dass die Grössen K nur von den Ausdrücken abhängen:

$$\sum x_l^n \quad \text{und} \quad \sum u_l x_l^{n-1},$$

wobei gesetzt ist:

$$3)\ \ x_l = sn^2\alpha_l, \qquad 4)\ \ u_l = sn\,\alpha_l . cn\,\alpha_l . dn\,\alpha_l .$$

Wir können aber noch mehr sagen. Wenn nämlich unter p_1, $p_2, \dots p_m$ die Coefficienten derjenigen algebraischen Gleichung:

$$5) \qquad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots p_m = 0$$

verstanden werden, deren Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_m$ sind und gleichzeitig

$$6) \qquad q_l = u_1 x_1^l + u_2 x_2^l + \cdots u_m x_m^l$$

gesetzt wird, so bemerken wir, dass sich sämmtliche Coefficienten K_2, $K_3, \dots$ durch die $2m$ Grössen $p_1, p_2, \dots p_m, q_0, q_1 \dots q_{m-1}$ allein ausdrücken lassen. Einerseits lässt sich ja jede ganze symmetrische Function von $x_1, x_2, \dots x_m$, also insbesondere auch jeder Ausdruck von der Form:

$$x_1^n + x_2^n + \cdots x_m^n$$

als ganze rationale Function von $p_1, p_2, \dots p_m$ darstellen und andererseits kann vermöge der Identitäten:

$$x_l^m + p_1 x_l^{m-1} + p_2 x_l^{m-2} + \cdots p_m = 0, \quad l = 1, 2, \dots m$$

eine jede höhere Potenz von x_l linear durch $x_l, x_l^2, \dots x_l^{m-1}$, also jeder Ausdruck von der Form:

$$u_1 x_1^n + u_2 x_2^n + \cdots u_m x_m^n$$

linear und homogen durch $q_0, q_1, \dots q_{m-1}$ dargestellt werden.

Bezeichnen wir ferner, um die im Bau der Coefficienten $K_2, K_3, \dots$ auftretende Gesetzmässigkeit besser hervortreten zu lassen, die Grössen:

$$p_1, q_0, p_2, q_1 \cdots p_m, q_{m-1}$$

der Reihe nach durch die Buchstaben:

$$\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \cdots \varrho_{2m}, \varrho_{2m+1},$$

so kann allgemein gesprochen die Grösse $\varrho_{n+1} (n = 1, 2, \dots 2m)$ in den Coefficienten:

$$K_2, K_3, \dots K_n$$

gar nicht auftreten, in den Coefficienten:

$$K_{n+1}, K_{n+2}, \dots K_{2n+1}$$

nur linear vorkommen, in den Coefficienten:

$$K_{2n+2},\ K_{2n+3}, \ldots K_{3n+2}$$

nur quadratisch vorkommen u. s. f.

Diese Bemerkung ergiebt dann unmittelbar die Richtigkeit des folgenden von Naetsch aufgestellten

Lehrsatzes: Sind $K_2, K_3, K_4, \ldots$ die Coefficienten, welche bei der Entwickelung:

$$\Phi(v) = C\left(\frac{1}{u}\right)^m (1 + K_2 u^2 + K_3 u^3 + \cdots)$$

unserer doppeltperiodischen Function zweiter Art:

$$\Phi(v) = \frac{\vartheta_0(v + a_1)\vartheta_0(v + a_2)\ldots\vartheta_0(v + a_m)}{\vartheta_1^m(v)} e^{-\Sigma \frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} r}$$

nach steigenden Potenzen von u auftreten und definiren wir die Grössen $\varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{2m}, \varrho_{2m+1}$ in der oben angegebenen Weise, so hängt:

K_2 von ϱ_2,
K_3 von ϱ_3 und ϱ_2,
K_4 von $\varrho_4, \varrho_3, \varrho_2$,
. . . .
K_{2m+1} von $\varrho_{2m+1}, \varrho_{2m}, \ldots \varrho_3, \varrho_2$

ab, so zwar, dass in

$$K_{m+1}, K_{m+2}, \ldots K_{2m}, K_{2m+1}$$

die Grössen:

$$\varrho_{m+1}, \varrho_{m+2}, \ldots \varrho_{2m}, \varrho_{2m+1}$$

nur linear vorkommen.

Dieser Satz wird in der Theorie der Differentialgleichungen, denen die Functionen zweiter Art Genüge leisten, gebraucht werden.

§ 85.

Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen dritter Art in Potenzreihen.

Bei der Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen dritter Art können wir uns auf die Entwickelung gewisser Primfunctionen beschränken. Wir wollen hierbei annehmen, dass die charakteristische Zahl n eine ungerade Zahl sei, indem wir bemerken, dass der entgegengesetzte Fall durchaus analog behandelt werden kann. Wenn dann die Zahl der Nullstellen grösser ist als die Zahl der Unendlichkeitsstellen, so können wir als Primfunction den Ausdruck zu Grunde legen:

$$\frac{\vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau) . \vartheta_0(na, n\tau)}.$$

Die Entwickelung desselben kann in folgender Weise gegeben werden.

Seien zunächst $a_1, \ldots a_n$ beliebige Grössen, so können wir vermöge der Untersuchungen des 83. Paragraphen die Function entwickeln:

$$\prod \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v + a_r)}{\vartheta_0(a_r)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \frac{v^2}{2}}.$$

Die Coefficienten setzen sich ganz und rational aus den elliptischen Functionen mit den Argumenten α_r und der Constanten k^2 zusammen.

Wir setzen nun an Stelle der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ der Reihe nach:

$$a, a + \frac{1}{n}, \cdots a + \frac{n-1}{n},$$

und nehmen die bekannten Beziehungen hinzu:

$$\prod \vartheta_1\left(v + a + \frac{r}{n}\right) = c \,.\, \vartheta_1(nv + na, n\tau),$$

$$\prod \vartheta_0\left(v + a + \frac{r}{n}\right) = c \,.\, \vartheta_0(nv + na, n\tau),$$

wobei c eine bekannte Constante bedeutet; dann erhalten wir den

Lehrsatz: Die Function

$$k^{-\frac{n}{2}} \frac{\vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} e^{-\frac{\vartheta_0'(na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} nv - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} n \frac{v^2}{2}}$$

lässt sich nach Potenzen von u entwickeln. Die Coefficienten setzen sich ganz und rational aus den elliptischen Functionen mit den Argumenten $\alpha + \frac{2rK}{n}$ und der Grösse k^2 zusammen.

Für die wirkliche Berechnung der Coefficienten können ähnliche Recursionsformeln wie die früher aufgestellten entwickelt werden, indessen sehen wir von der Aufstellung derselben ab. Dagegen wollen wir eine zweite Darstellung der Entwickelung kurz angeben.

Setzen wir in den Formeln von § 83 an Stelle von:

$$v, a, \tau, u, \alpha, k$$

resp.

$$nv, na, n\tau, u_1, \alpha_1, c,$$

wobei:

$$u_1 = n\pi\vartheta_3^2(0, n\tau)v = \pi n\theta_3^2 . v,$$
$$\alpha_1 = n\pi\vartheta_3^2(0, n\tau)a = \pi n\theta_3^2 . a$$

ist und c den transformirten Modul bedeutet, so ergiebt sich der

Lehrsatz: Die Function:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} e^{-\frac{\vartheta_0'(na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} nv - \frac{\theta_0''}{\theta_0} \frac{n^2 v^2}{2}}$$

lässt sich nach Potenzen von u_1 entwickeln. Die Coefficienten sind ganze rationale Functionen der elliptischen Functionen mit dem Argumente α_1 und der Constanten c^2.

Multipliciren wir die beiden Darstellungen mit:

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0(v, \tau)} e^{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \frac{v^2}{2}},$$

so ergiebt sich für unsere Primfunction eine doppelte Darstellung, die durch den folgenden Lehrsatz charakterisirt wird:

Erstens: Die Function:

$$k^{-\frac{n}{2}} \frac{\vartheta_0 . \vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau)\vartheta_0(na, n\tau)} e^{-\frac{\vartheta_0'(na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} nv - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}(n-1)\frac{v^2}{2}}$$

lässt sich nach Potenzen von u entwickeln. Die Coefficienten setzen sich ganz und rational aus den elliptischen Functionen mit den Argumenten $\alpha + \frac{2rK}{n}$ und der Constanten k^2 zusammen.

Zweitens: Die Function:

$$\frac{\vartheta_0}{\sqrt{c}} \frac{\vartheta_1(nv + na, n\tau)}{\vartheta_0(v, \tau)\vartheta_0(na, n\tau)} e^{-\frac{\vartheta_0'(na, n\tau)}{\vartheta_0(na, n\tau)} nv - \left(\frac{n^2 \Theta_0''}{\Theta_0} - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\frac{v^2}{2}}.$$

lässt sich nach Potenzen von u entwickeln. Die Coefficienten setzen sich ganz und rational aus den elliptischen Functionen mit dem Argumente α_1 und den Constanten $k^2, c^2, \frac{\Theta_3^2}{\vartheta_3^2}$ zusammen, wobei dann zwischen den letzteren Grössen die bekannten Beziehungen der Transformationstheorie bestehen.

Auch hier ist die Substitution halber Perioden und die lineare Transformation von Bedeutung. Vermehren wir a um halbe Perioden, so erhalten wir die Entwickelung dreier neuer Functionen, ebenso lässt sich ohne Weiteres die lineare Transformation anwenden.

In ähnlicher Weise können die Functionen behandelt werden, bei denen die Zahl der Nullstellen kleiner ist, als die Zahl der Unendlichkeitsstellen. Dieselben setzen sich aus den Functionen zusammen:

$$\frac{\vartheta_1(v-b,\tau)}{\vartheta_0(v-a,\tau)}\,\frac{1}{\vartheta_\alpha(nv,n\tau)}.$$

Die Entwickelung derselben erhalten wir, indem wir die bekannten Entwickelungen der beiden Functionen:

$$\frac{\vartheta_1(v-b,\tau)}{\vartheta_0(v-a,\tau)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\vartheta_\alpha(nv,n\tau)}$$

mit einander multipliciren. Da keinerlei neue Momente auftreten, kann von der Aufstellung des entsprechenden Satzes abgesehen werden.

Hiermit sind die wichtigsten Sätze über die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen in Potenzreihen gegeben.

Die wichtigsten Lehrbücher und Formelsammlungen, die in Betracht kommen, sind die folgenden:

GUDERMANN: Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. Berlin 1844.

SCHELLBACH: Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen. Berlin 1864.

SCHLÖMILCH: Compendium der höheren Analysis 2. Band. Braunschweig 1866, 1874.

KOENIGSBERGER: Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Leipzig 1868.

MANSION: Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques. Paris 1870.

KOENIGSBERGER: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig 1874.

BRIOT et BOUQUET: Théorie des fonctions elliptiques. Paris 1875.

CAYLEY: An elementary treatise on elliptic functions. Cambridge 1876.

THOMAE: Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden. Halle 1876.

DURÈGE: Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig 1878.

LAURENT: Théorie élémentaire des fonctions elliptiques. Paris 1880.

RAUSENBERGER: Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln. Leipzig 1884.

BOBECK: Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig 1884.

SPARRE: Cours sur les fonctions elliptiques. Bruxelles 1886.

HALPHEN: Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. Paris 1886.

SCHWARZ: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Prof. K. Weierstrass. Göttingen.

THOMAE: Abriss einer Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen und der Thetafunctionen. Halle 1890.

ENNEPER: Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte, herausgegeben von Müller. Halle 1890.

WEBER: Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1891.

TANNERY et MOLK: Eléments de la théorie des fonctions elliptiques. Paris 1893.

KLEIN: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Leipzig 1890, 1892.

Nr. 1 (§§ 1—11).

In Bezug auf die Einleitung ist vor allem auf die Vorlesungen von Weierstrass und dessen Abhandlung: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen 1877 zu verweisen. Die Weierstrass'schen Untersuchungen sind daneben in einer Reihe von Lehrbüchern wiedergegeben worden. Unter diesen mögen die folgenden herausgegriffen werden:

THOMAE: Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Halle 1880.

RAUSENBERGER: Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variablen. Leipzig 1884.

BIERMANN: Theorie der analytischen Functionen. Leipzig 1887.

Auf das zweite Werk möge insbesondere bei den Paragraphen 7 und 8 verwiesen werden.

Nr. 2 (§ 8).

In Bezug auf den Laurent'schen Satz werde verwiesen auf:

LAURENT: Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable. Comptes rendus 17.

—— Rapport sur ce mémoire. Comptes rendus 17.

CAUCHY: Note sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières positives et négatives des variables. Comptes rendus 17.

MITTAG-LEFFLER: Démonstration nouvelle du théorème de Laurent. Acta mathematica 4.

SCHEEFFER: Beweis des Laurent'schen Satzes. Acta math. 4.

Nr. 3 (§§ 12—15).

Da die allgemeine Theorie der periodischen Functionen hier nur in sehr geringer Ausdehnung gebraucht wird, so begnügen wir uns in Betreff der Paragraphen 12, 13, 14, 15 in der Hauptsache damit, auf das citirte Werk von Rausenberger zu verweisen, daneben auf die Arbeiten von Klein, Poincaré, Rausenberger, die sich im 18., 19., 20. Bande der Mathematischen Annalen etc. befinden.

Nr. 4 (§ 16, 18, 19, 20).

In Betreff der Paragraphen 16, 18, 19, 20 bemerken wir zunächst, dass die Bezeichnungsweise „Doppeltperiodische Functionen erster, zweiter, dritter Art" von Hermite herrührt, der sich vor allem mit den Functionen zweiter und dritter Art in bahnbrechender Weise beschäftigt hat — dann aber machen wir auf die folgenden Arbeiten aufmerksam:

HERMITE: Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Comptes rendus 85 oder auch Paris 1885.

Cours de M. Hermite professé pendant le 2e Semestre 1881—1882 rédigé par M. Andoyer. Paris 1883.

Cours de M. Hermite rédigé en 1882 par M. Andoyer. Paris 1887.

BIEHLER: Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Paris 1879.

APPELL: Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Annales scientifiques de l'École normale supérieure III. 1.

Die anderen Arbeiten von Appell über die genannten Functionen sollen später citirt werden.

FROBENIUS: Ueber die Functionen zweiter Art. Crelle 93. Band.

MOHRMANN: Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der doppeltperiodischen Functionen dritter Gattung. Teubner 1889.

Daneben werde auf das citirte Werk von Rausenberger besonders aufmerksam gemacht.

Nr. 5 (§ 17).

Die citirte Arbeit von Jacobi hat den Titel: De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur und befindet sich im Crelle'schen Journal 13. Band und im 2. Bande der gesammelten Werke. In Bezug auf unendlich vieldeutige Functionen, die freilich für unsere Zwecke nicht in Betracht kommen, möge verwiesen werden auf:

Casorati: Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes Milan. 1885 und Acta math. VIII.

Nr. 6 (§ 18).

Die in Frage kommende Arbeit von Eisenstein hat den Titel: Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind und der mit ihnen zusammenhängenden Doppelreihen und befindet sich im 35. Bande des Crelle'schen Journals. (Siehe auch Math. Abhandlungen von Eisenstein. Berlin 1847.)

Unter den Abhandlungen, welche sich mit diesen Doppelproducten beschäftigen, mögen die folgenden herausgegriffen werden:

Mittag-Leffler: En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska funktionerna. Helsingfors 1876.

—— En metod att i teorien for de elliptiska funktionerna hasleda de oundlig da dubbel-producterna utus multiplications formlerna. Öfversigt af Kongl. Svensk Wetenskabs Academiens Forhandligar 1876.

Kronecker: Die Legendre'sche Relation. Berliner Berichte 1891.

Fiske: On the doubly infinite products. New York Math. S. Bull. I.

Die letzte Arbeit enthält eine historische Skizze des genannten Gegenstandes.

Nr. 7 (§ 21).

Das Hermite'sche Transformationsprincip hat sich für die Theorie der doppeltperiodischen Functionen von schwerwiegendster Bedeutung gezeigt. Dasselbe befindet sich in der Arbeit: Extraits de deux lettres de M. Charles Hermite à M. C. G. J. Jacobi. Crelle 32.

Dasselbe findet in einer grossen Reihe von Arbeiten Anwendung. In consequenter Weise hat es Weber in seinem citirten Werke über die elliptischen Functionen für die Theorie der letzteren verwandt.

Nr. 8 (§§ 23—26).

In Bezug auf die Thetarelationen, die schon zum grossen Theil in den Jacobi'schen Arbeiten enthalten sind, möge auf die folgenden weiteren Veröffentlichungen verwiesen werden.

Smith: Note on the formula for the multiplication of four theta-functions. Proceedings of the London Math. Soc. X.

Enneper: Ueber eine Gleichung zwischen Thetafunctionen. Math. Annalen 17.

Weierstrass: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen pag. 47 sequ.

David: Sur les relations algébriques des fonctions ϑ. Mémoires de l'Académie des sciences etc. de Toulouse. VII.

Caspary: Ueber die Verwendung algebraischer Identitäten zur Aufstellung von Relationen für Thetafunctionen einer Veränderlichen. Math. Ann. 27.

Caspary: Sur une méthode élémentaire pour obtenir le théorème fondamental de Jacobi, relatif aux fonctions thêta d'un seul argument. Comptes rendus 104.

Scheibner: Ueber die Producte von drei und vier Thetafunctionen. Crelle Journal 102.

Kronecker: Bemerkungen über die Jacobi'schen Thetaformeln. Crelle Journal 102.

—— Ueber die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobi'schen Thetaformeln. Berliner Berichte 1891 und Crelle Journal 108.

Kapteyn: Nouvelle méthode pour démontrer la formule fondamentale des fonctions θ. Darboux Bulletin (2) 15.

Nr. 9 (§ 27).

In Bezug auf die in § 27 pag. 78 abgeleitete Differentialbeziehung, die sich schon in den Jacobi'schen Arbeiten findet, möge noch verwiesen werden auf:

Lipschitz: Déduction arithmétique d'une relation due à Jacobi. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Acta mathematica 7.

Nr. 10 (§ 28).

In Bezug auf die Darstellung der Thetafunctionen n^{ter} Ordnung durch die gewöhnlichen Thetafunctionen möge vor Allem verwiesen werden auf:

Weber: Zur Theorie der elliptischen Functionen. Acta mathematica 6.

Nr. 11 (§ 29).

Die Literatur über die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen der verschiedenen Arten in Fourier'sche und damit zusammenhängende Reihen soll im 2. Bande in ausführlicher Weise gegeben werden. Hier sei nur auf die Arbeiten aufmerksam gemacht:

Biehler: Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Paris 1879.

Krause: Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen. Math. Annalen 33.

Nr. 12 (§§ 30—32).

In Bezug auf den Inhalt dieses (30.) und der beiden folgenden Paragraphen möge vor allem auf die nachgelassene Arbeit von Jacobi verwiesen werden, die sich am Ende des ersten Bandes seiner gesammelten Werke befindet, daneben auf die beiden schon genannten Arbeiten von Weierstrass.

Nr. 13 (§ 33).

Die Beziehungen zwischen den elliptischen Functionen, insbesondere das Additionstheorem und das damit aufs engste zusammenhängende Additionstheorem der elliptischen Integrale, sind der Gegenstand einer überaus grossen Reihe von Arbeiten geworden. Zum Theil beziehen sich dieselben auf die Integration einer Differentialgleichung, zum Theil auf den Zusammenhang unserer Theorien mit der sphärischen Trigonometrie und der Geometrie, zum Theil schliessen sie an unsere Darstellung an.

In Bezug auf die Literatur möge vor Allem auf das Enneper'sche Werk und die Arbeit von Genocchi verwiesen werden: Rassegna d'alcuni scritti relativi all' addizione degl' integrali ellittici ed abeliani. Boncompagni Bull. III.

Aus der Fülle der vorhandenen Literatur greifen wir die folgenden Untersuchungen heraus, die mit den unseren in Zusammenhang stehen.

Gudermann: Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. Crelle Journal 18.

Hermite: Note sur la théorie des fonctions elliptiques. Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral par Lacroix.

Cayley: A theorem in elliptic functions. Proceedings of the London Math. Society 10.

Glaisher: A group of formulae connecting the elliptic functions of four quantities. Proceedings of the London Math. Soc. 10.

—— Formulae in elliptic functions. Reports of the Meeting of the British Association etc. 1879.

Gilbert: Note sur la formule d'addition des fonctions elliptiques. Annales de la société scientifique de Bruxelles 4.

Wilkinson: An elliptic function identity. The Messenger of Math. (2) 10.

Glaisher: On some elliptic function and trigonometrical theorems. (2). 10 ibidem.

—— Formulae for the *sn*, *cn*, *dn* of $u + v + w$. The Messenger of Math. (2) 11.

Wilkinson: On some formulae arising from the differentiation of elliptic functions with regard to the modulus. Proc. of the Lond. Math. Soc. 13.

Novarese: Intorno ad alcune formole di Hermite par l'addizione delle funzioni ellittiche. Atti della Reale Accad. di Torino 17.

Glaisher: On certain formulae in elliptic functions. Quarterly Journal 19.

Wilkinson: Some elliptic function formulae. Proc. of the Lond. Math Soc 13.

—— On the addition equations for the elliptic und θ-functions of the sum of n arguments. ibidem.

Johnson: System of formulae for the *sn*, *cn*, and *dn* of $u+v+w$. ibidem.

Hermite: Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques. Acta Math. 1.

Wilkinson: On elliptic function formulae connected with the transformation of rectangular coordinates. Proc. of the Lond. Math. Soc. 14.

Cayley: On Mr. Wilkinson's rectangular transformation. ibidem.

Schröter: Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. Acta Math. V.

Cayley: On a formula in elliptic functions. The Mess. of Math. (2), 14.

Forsyth: Note on Prof. Cayley's formula in elliptic functions. ibidem.

Cayley: On the addition of elliptic functions. ibidem.

Story: The addition-theorem for elliptic functions. American Journal of Math. 7.

Martins da Silva: Sur une question de la théorie des fonctions. Bulletin de l'Académie Royale etc. Bruxelles (3), 10.

—— Sur trois formules de la théorie des fonctions elliptiques. Bulletin des sciences math. et astr. Paris (2), 10.

Albeggiani: Intorno ad alcune formole nella teorica delle funzioni ellittiche Rendiconti del circolo Matematico 1.

Caspary: Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduite des dites relations. Journal de Mathématiques. Paris (4), 6.

Frobenius und Stickelberger: Ueber die Addition und Multiplication der elliptischen Functionen. Crelle 88.

Günther: Das Additionstheorem der elliptischen Functionen. Crelle 109.

In der überwiegenden Mehrheit haben diese Arbeiten den Zweck, weitere allgemeiner gehaltene Beziehungen zwischen den elliptischen Functionen mit verschiedenen Argumenten herzustellen. Von besonderer Wichtigkeit sind diejenigen Arbeiten, in denen es sich darum handelt, allgemeine Ausdrücke für $sn(u_1 + \cdot\cdot u_m)$, $cn(u_1 + \cdots u_m)$, $dn(u_1 \cdots + u_m)$ herzustellen. Die Resultate sind in besonders übersichtlicher Weise in der Arbeit von Story entwickelt.

Setzt man: $s_\alpha = sn(u_\alpha)$, $c_\alpha = cn(u_\alpha)$, $d_\alpha = dn(u_\alpha)$, so wird für eine gerade Anzahl von Argumenten:

$$sn(u_1 + u_2 + \cdots u_{2n}) = \frac{N_1}{N},$$

$$cn(u_1 + u_2 + \cdots u_{2n}) = \frac{N_2}{N},$$

$$dn(u_1 + u_2 + \cdots u_{2n}) = \frac{N_3}{N},$$

wobei unter den Grössen N, N_1, N_2, N_3 die Determinanten verstanden werden:

$$N = \left| s_\alpha^{2n-1},\ s_\alpha^{2n-3}, \ldots\ s_\alpha,\ s_\alpha^{2n-2}.\,c_\alpha.\,d_\alpha,\ s_\alpha^{2n-4}.\,c_\alpha.\,d_\alpha, \ldots\ c_\alpha.\,d_\alpha \right| \quad \alpha: 1, 2, \ldots 2n,$$

$$N_1 = \left| s_\alpha^{2n},\ s_\alpha^{2n-2}, \ldots 1,\ s_\alpha^{2n-3}.\,c_\alpha.\,d_\alpha,\ s_\alpha^{2n-5}.\,c_\alpha.\,d_\alpha, \ldots\ s_\alpha.\,c_\alpha.\,d_\alpha \right| \quad \alpha: 1, 2, \ldots 2n,$$

$$N_2 = \left| s_\alpha^{2n-1}.\,c_\alpha,\ s_\alpha^{2n-3}.\,c_\alpha, \ldots\ s_\alpha.\,c_\alpha,\ s_\alpha^{2n-2}.\,d_\alpha,\ s_\alpha^{2n-4}.\,d_\alpha \ldots\ d_\alpha \right| \quad \alpha: 1, 2, \ldots 2n,$$

$$N_3 = \left| s_\alpha^{2n-1}\,d_\alpha,\ s_\alpha^{2n-3}\,d_\alpha, \ldots\ s_\alpha\,d_\alpha,\ s_\alpha^{2n-2}.\,c_\alpha,\ s_\alpha^{2n-4}.\,c_\alpha \cdots\ c_\alpha \right| \quad \alpha: 1, 2, \ldots 2n.$$

Für eine ungerade Anzahl von Argumenten wird:

$$sn(u_1 + \cdots u_{2n-1}) = \frac{M_1}{M},$$

$$cn(u_1 + \cdots u_{2n-1}) = \frac{M_2}{M},$$

$$dn(u_1 + \cdots u_{2n-1}) = \frac{M_3}{M},$$

wobei unter den Grössen M, M_1, M_2, M_3 die folgenden zu verstehen sind:

$$M = \left| s_\alpha^{2n-2},\ s_\alpha^{2n-4}, \ldots 1,\ s_\alpha^{2n-3}.\,c_\alpha.\,d_\alpha,\ s_\alpha^{2n-5}.\,c_\alpha.\,d_\alpha, \ldots\ s_\alpha.\,c_\alpha.\,d_\alpha \right| \quad \alpha: 1, 2, \ldots 2n-1,$$

$$M_1 = \left| s_\alpha^{2n-1},\ s_\alpha^{2n-3}, \ldots\ s_\alpha,\ s_\alpha^{2n-4}.\,c_\alpha.\,d_\alpha,\ s_\alpha^{2n-6}.\,c_\alpha.\,d_\alpha, \ldots\ c_\alpha.\,d_\alpha \right| \quad \alpha: 1, 2, \ldots 2n-1,$$

$$M_2 = \left| s_\alpha^{2n-2}.\,c_\alpha,\ s_\alpha^{2n-4}.\,c_\alpha, \ldots\ c_\alpha,\ s_\alpha^{2n-3}.\,d_\alpha,\ s_\alpha^{2n-5}.\,d_\alpha, \ldots\ s_\alpha.\,d_\alpha \right| \quad \alpha: 1, 2, \ldots 2n-1,$$

$$M_3 = \left| s_\alpha^{2n-2}.\,d_\alpha,\ s_\alpha^{2n-4}.\,d_\alpha, \ldots\ d_\alpha,\ s_\alpha^{2n-3}.\,c_\alpha,\ s_\alpha^{2n-5}.\,c_\alpha, \ldots\ s_\alpha.\,c_\alpha \right| \quad \alpha: 1, 2, \ldots 2n-1.$$

Die Formeln können als unmittelbare Folgerungen des Hermite'schen Transformationsprincipes entwickelt werden. Sie leiden an dem Uebelstand, dass sie für den Fall der Multiplication keine brauchbaren Resultate geben.

Nr. 14 (§ 34).

In Bezug auf die Entwickelung der elliptischen Functionen in trigonometrische Reihen möge an dieser Stelle nur auf die schon citirte Arbeit von Biehler verwiesen werden.

Die unendlichen Doppelsummen, die in § 34 auftreten und ähnliche mit ihnen zusammenhängende, sind in einer ganzen Reihe neuerer und wichtiger Arbeiten verwandt worden, so in den Arbeiten von Kronecker, Hurwitz, Scheibner u. a.

Nr. 15 (§§ 35, 36).

In Bezug auf die Transformation der elliptischen Functionen, die in ihren Grundzügen sich schon in den Arbeiten von Jacobi und Abel entwickelt findet, möge an dieser Stelle nur auf die schon citirten Werke von Königsberger, Briot und Bouquet, Mansion und Enneper verwiesen werden. In den beiden zuletzt genannten Werken finden sich eine Reihe werthvoller historischer Angaben.

Nr. 16 (§§ 37—39).

In Bezug auf die lineare Transformation möge vor allem auf das Enneper'sche Werk, 2. Auflage pag. 426 sequ. verwiesen werden. Die Hauptschwierigkeit liegt in der Bestimmung des constanten Factors bei der Transformation der Thetafunctionen. Sieht man von den älteren Autoren ab, und zwar von Jacobi und Gauss (Werke III pag. 386), so hat Hermite zuerst eine ausführliche Bestimmung desselben auf Grund der Gauss'schen Summen gegeben und zwar in seiner Arbeit: Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques. Liouville Journal (2) III.

Daneben möge auf die folgenden Arbeiten verwiesen werden:

Gordan: Die Transformation der θ-Functionen. Giessen 1863.

Fuhrmann: Transformation der θ-Functionen. Königsberg in Pr. 1877.

Besch: Bestimmung der bei der linearen Umformung der Thetafunctionen auftretenden Transformationsconstanten. Königsberg in Pr. 1877.

Sochocki: Bestimmung der constanten Factoren in den Formeln für die lineare Transformation der Thetafunctionen etc. (Polnisch.) Par. Denkschrift 1878.

Rausenberger: Beitrag zur linearen Transformation der elliptischen Functionen. Crelle Journal 91.

Enneper: Bemerkungen über Thetafunctionen. Gött. Nachr. 1883.

Thomae: Die Constante der linearen Transformation der Thetafunctionen. ibidem.

Hierbei möge bemerkt werden, dass in diesen beiden Arbeiten, wie es auch bei unserer Darstellung geschehen ist, nur das Quadrat der Constanten bestimmt wird.

Cayley: A verification in regard to the linear transformation of the theta-functions. Quarterly Journal XXI.

Hager: Ueber die lineare Transformation der Thetafunctionen. Göttingen 1877.

Nr. 17 (§§ 40, 41).

In Bezug auf die ältere Literatur über die Transformation zweiten Grades möge vor Allem auf das Werk von Enneper verwiesen werden, 2. Auflage pag. 352 sequ.

Daneben mögen die neueren Arbeiten hervorgehoben werden:

Kummel: The quadratic transformation of elliptic integrals, combined with the algorithm of the arithmetico-geometric mean. Bulletin of the Phil. Society of Washington VII.

GLAISHER: On the transformation and developments of the twelve elliptic functions and the four Zeta-functions. Messenger of Math. (2) 17.

Nr. 18 (§§ 42—46).

In Bezug auf die Entwickelung der elliptischen Functionen und ihrer Potenzen resp. Producte möge auf die folgenden Arbeiten verwiesen werden:

MEYER: Ueber rationale Verbindungen der elliptischen Transcendenten. Crelle Journal 56.

DUMAS: Zur Theorie der elliptischen Functionen. Berlin 1860.

BAUMERT: Zur Theorie der elliptischen Functionen. Breslau 1879.

HERMITE: Sur la théorie des fonctions elliptiques. Comptes rendus 57. 1863. Journal de Mathématiques (2) 9.

—— Extrait d'une lettre à M. L. Koenigsberger sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable. Crelle Journal 81.

DIDON: Question. Nouvelles Annales (2) 11.

MOREAU: Solution d'une question. Nouvelles Annales (2) 15.

DÉSIRÉ ANDRÉ: Sur le développement des fonctions elliptiques et de leurs puissances. Comptes rendus 83.

—— Développements en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances. Ann. de l'École normale (2), 6.

—— Sur le développement de la fonction $\mu(x)$ suivant les puissances croissantes du module. Bulletin Soc. Math. Fr. 6.

—— Sur le développement de la fonction elliptique $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes du module. Ann. de l'École normale (2), 8.

—— Développements par rapport au module des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances. Ann. de l'Éc. normale (2), 9.

GLAISHER: On the series which represent the twelve elliptic and the four Zeta-functions. The Messenger of Math. (2), 18.

ROLLIN A. HARRIS: On the expansion of $sn x$. Annals of Math. 4.

KRAUSE: Ueber die Entwickelung der elliptischen Functionen in Potenzreihen. Berichte der Leipz. Gesellschaft der Wissenschaften 1894.

Nr. 19 (§ 45).

Die hier eingeführte Function $p(u)$ steht in engem Zusammenhang mit der von Weierstrass eingeführten $\wp(u)$, ebenso wie die Functionen $Al_\alpha(u)$ in engem Zusammenhang mit den Weierstrass'schen σ-Functionen stehen. Es würde den Rahmen unserer Betrachtungen überschreiten, wollten wir hierauf näher eingehen. Die Beziehungen finden sich ausführlich in den Formeln und Lehrsätzen zum Gebrauche der elliptischen Functionen entwickelt, welche von Schwarz herausgegeben sind, daneben in neueren Lehrbüchern, wie dem von Halphen, Weber etc.

Nr. 20 (§ 47).

Die Abhandlung von Jacobi befindet sich im zweiten Bande seiner Werke pag. 171. Daneben werde verwiesen auf:

KRAUSE: Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Crelle 98.

HURWITZ: Ueber die Differentialgleichungen dritter Ordnung, welchen die Formen mit linearen Transformationen in sich genügen. Math. Ann. 33.

Nr. 21 (§§ 48, 52).

In Bezug auf die Differentialgleichungen, denen die Grössen K, E und damit zusammenhängenden Grössen Genüge leisten, möge ausser auf die genannten Lehrbücher auf die folgenden Arbeiten verwiesen werden (siehe auch Nr. 22).

Lipschitz: Sur un point de la théorie des fonctions elliptiques. Comptes rendus 97.

Hermite: Remarque au sujet de cette note. ibidem.

Martins da Silva: Sur trois relations différentielles données par M. Lipschitz dans la théorie des fonctions elliptiques. Jornal de Sciencias Mathematicas etc. pelo Dr. F. Gomes Teixeira VI.

Stuart: Note on the connexion between Legendre's coefficients and the complete elliptic integral of the first kind. The Messenger of Mathematics. (2), XIII.

Glaisher: On the quantities $K, E, J, G, K', E', J', G'$ in elliptic functions. The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. XX.

Brioschi: Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni ellittiche. Annali di Matematica etc. diretti dal prof. Brioschi (2), 14.

Bruns: Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. Mathematische Annalen 27.

Kleiber: On some differential equations satisfied by the quantities K, E etc. in elliptic functions. The Messenger of Mathematics. 18.

Scheibner: Ueber die Differentialgleichungen der elliptischen Modulfunctionen und Invarianten. Berichte der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften 41. Band.

Nr. 22 (§§ 49—51).

In Betreff der Berechnung und Darstellung von K etc. als Functionen von k^2 möge auf die folgenden Arbeiten verwiesen werden (siehe auch Nr. 21):

Schläfli: Sulla sviluppo del periodo imaginario pel caso che il modulo delle funzioni ellittiche sia abbastunza piccolo. Annali di Matem. 2. III.

Steen: Et Par Kjaedebröker angaaende elliptiske Integraler. Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Zeuthen. (3), III

Fuchs: Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst. Crelle Journal 71. Band

—— Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. Crelle 83. Band.

Scheibner: Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. XII.

Radicke: Eine einfache Darstellungsform der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. Schlömilch Zeitschrift für Math. 21.

Darboux: Note sur deux intégrales elliptiques qui se présentent sous forme indéterminée. Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux (2), III.

Goursat: Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce. Bulletin de la Société Mathématique de France. X.

Weierstrass: Zur Theorie der elliptischen Functionen. Sitzungsberichte der Berliner Academie 1883.

MERTENS: Zur Theorie der elliptischen Functionen. Sitzungsberichte der Wiener Academie 1891.

GLAISHER: On the expression for the complete elliptic integral of the second kind as a series proceeding by sines of multiples of the modular angle. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine XIX.

CATALAN: Sur un développement de l'intégrale elliptique de première espèce et sur une suite de nombres entiers. Belg. Mém. 46.

GLAISHER: Expansions of K, J, G, E in powers of $k'^2 - k^2$. The Messenger of Mathem. (2), 19.

—— On the expansion of $\frac{G}{K}$, $\frac{K}{G}$, $\frac{J}{E}$ etc. in ascending powers of k^2. Ibidem.

Nr. 23 (§ 52).

In Bezug auf die Legendre'sche Relation möge ausser auf die Lehrbücher auf die folgenden neueren Arbeiten verwiesen werden:

GLAISHER: Proof of the formula $KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$. Messenger (2) IV. 1874.

JAMET: Sur les périodes des intégrales elliptiques. Nouvelles Annales (3), X.

und vor allem auf:

KRONECKER: Die Legendre'sche Relation. Berliner Berichte 1891.

BUCHHEIM: Note on theorems in Weierstrass' theory of elliptic functions. Messenger of Math. XVI.

HURWITZ: Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen etc. Leipzig 1881.

FUCHS: Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. Crelle 83 pag. 31.

Nr. 24 (§ 53).

In Bezug auf die Entwickelung der Functionen $Al_\alpha(u)$ in Potenzreihen werde verwiesen auf:

WEIERSTRASS: Ueber die Entwickelung der Modular-Functionen. Math. Werke I. Band.

—— Theorie der Abel'schen Functionen. Crelle 52.

JOUBERT: Sur le développement en séries des fonctions $Al(x)$. C. R. 82 pag. 1259 und 1326.

SCHEIBNER: Ueber den Zusammenhang der Thetafunctionen mit den elliptischen Integralen. Berichte der Gesellschaft der Wissenschaft zu Leipzig 1889.

DÉSIRÉ ANDRÉ: Sur le développement des fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable. C. R. 85. Liouville Journal (3), V.

—— Sur les développements des fonctions $Al(x)$, $Al_1(x)$, $Al_2(x)$ suivant les puissances croissantes du module. C. R 86. Liouville Journal (3), V.

KRAUSE: Ueber die Entwickelung der elliptischen Functionen in Potenzreihen. Berichte der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften 1894.

In den letzten Arbeiten werden für die Functionen $Al_\alpha(u)$ ähnliche Eigenschaften entwickelt, wie in § 44 und § 45 für die Functionen snu, cnu etc.

HAUSSNER: Ueber die Zahlencoefficienten in den Weierstrass'schen σ-Reihen. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1894.

Nr. 25 (§§ 54—58).

In Bezug auf die ältere Literatur über die Multiplication der elliptischen Functionen möge vor Allem auf das Enneper'sche Werk pag. 368 sequ. verwiesen werden.

Neben den entsprechenden Lehrbüchern, vor Allem von Mansion und Koenigsberger, heben wir die folgenden Arbeiten hervor:

Sanio: De functionum ellipticarum multiplicatione et transformatione quae ad numerum parem pertinet commentatio. Crelle 14.

Cayley: Note sur quelques formules qui se rapportent à la multiplication des fonctions elliptiques. Crelle 39 und 41.

Brioschi: Sur quelques formules pour la multiplication des fonctions elliptiques. Comptes rendus tome 59.

Baehr: Sur les formules pour la multiplication des fonctions elliptiques de la première espèce. (Multiplication mit 7.) Grunert's Archiv 36.

Betti: La teorica delle funzione ellittiche. Brioschi Annali IV.

Kiepert: Wirkliche Anführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen. Crelle 76.

Simon: Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem. Strassburg und Crelle 81.

Frobenius und Stickelberger: Zur Theorie der elliptischen Functionen. Crelle 83.

Halphen: Sur la multiplication des fonctions elliptiques. Comptes rendus 88.

—— Sur deux équations aux dérivées partielles relatives à la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques. Comptes rendus 88.

Frobenius und Stickelberger: Ueber die Addition und Multiplication der elliptischen Functionen. Crelle 88.

Glaisher: Formulae for $sn\,8u$, $cn\,8u$, $dn\,8u$ in terms of snu. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 32.

Novarese: Intorno alla multiplicazione delle funzioni ellittiche. Atti della Reale Accademia di Torino 17.

Runge: Algebraische Ableitung der Multiplication von cnu. Crelle 94.

Kronecker: Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. Berliner Monatsberichte der Acad. der Wissensch. 1883.

—— Weitere Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. ibidem.

Nr. 26 (§§ 59—63).

In Bezug auf die Theorie der Transformation n^{ten} Grades und zwar mit Rücksicht auf die Coefficientenbestimmung etc. mögen neben den Lehrbüchern, vor allem denjenigen von Koenigsberger, Briot und Bouquet, die folgenden Arbeiten hervorgehoben werden, wobei bemerkt wird, dass dieselben auch in das Gebiet der Modulargleichungen zum Theil hineingehören:

Cayley: A memoir on the transformation of elliptic functions. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 164. Proceedings of the Royal Society of London XXII.

Göring: Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben. Math. Annalen VII.

Laguerre: Sur la transformation des fonctions elliptiques. Comptes rendus 82.

Herstowsky: Zur Theorie der Jacobi'schen Thetafunctionen. Math. Annalen 9.

Laguerre: Sur la transformation des fonctions elliptiques. Bulletin de la Société Math. de France VI.

Cayley: Addition to the memoir on the transformation of elliptic functions. Philosophical Transactions 169.

Frobenius: Zur Theorie der Transformation der Thetafunctionen. Crelle's Journal 89.

Smith: Notes on the theory of elliptic transformation. Mess. of Math. (2), XII. Notes on the theory of elliptic functions. ibidem XIII.

Krause: Sur la transformation des fonctions elliptiques. Acta math. III.

Klein: Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe. Leipziger Berichte 1884.

Müller: Zur Transformation der Thetafunctionen. Hoppe Archiv (2), I.

Klein: Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der N^{ten} Stufe. Leipziger Abhandl. 1886.

Kronecker: Zur Theorie der elliptischen Functionen. Berliner Berichte 1886.

Hermite: Sur la transformation des fonctions elliptiques. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo V.

Faa de Bruno: Démonstration directe de la formule Jacobienne de la transformation cubique. American Journal of Math. X.

Cayley: On the transformation of elliptic functions. American Journal of Math. IX.

Nr. 27 (§ 62).

In Bezug auf die Constantenbestimmung in diesem Paragraphen möge auf das citirte Werk von Weber verwiesen werden (§ 27).

Nr. 28 (§ 64).

Es würde den Rahmen dieses Werkes überschreiten, wollten wir auf die reichhaltige Literatur über Modulfunctionen hier näher eingehen. Es möge nur verwiesen werden auf die Arbeit von Dedekind:

Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen. Crelle 83.

Daneben auf die Lehrbücher von Rausenberger, Klein, Weber.

Nr. 29 (§ 65).

In Bezug auf die Hermite'schen φ-, ψ- und χ-Functionen werde verwiesen auf:

Hermite: Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Paris 1859.

— Sur la résolution de l'équation du quatrième degré. Paris 1859.

Koenigsberger: Die linearen Transformationen der Hermiteschen φ-Functionen. Math. Ann. III.

Schläfli: Beweis der Hermite'schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen. Crelle 72.

Nr. 30 (§§ 66—69).

In Bezug auf die Modular- und Multiplicatorgleichungen möge ausser auf die Lehrbücher, besonders auf die Koenigsberger'schen und das Werk von Briot und Bouquet, auf die folgenden Arbeiten verwiesen werden:

Sohncke: Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum. Crelle Journal 16.

Matthieu: Mémoire sur les fonctions elliptiques. Journal de l'École polytechnique 25.

KOENIGSBERGER: Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen. Crelle Journal 72.

KOENIG: Zur Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Heidelberg 1871.

JOUBERT: Sur les équations qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Paris 1876.

KRAUSE: Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und ihre Anwendungen auf die Zahlentheorie. Mathematische Annalen 12.

BRIOSCHI: Sopra una classe di equazioni modulari. Annali di Matematica (2), 9.

—— Sopra alcune nuove relazioni modulari. Napoli 1866.

CAYLEY: Note on Schlaefli's modular equation for the cubic transformation. The Messenger of Math. (2), 20.

POCROVSKY: Beziehungen zwischen den Moduln und ihren complementären bei der Transformation 5ten Grades der elliptischen Functionen. Nachrichten der Universität Moskau.

CAYLEY: On the Jacobian sextic equation. The Quarterly Journal 18.

—— An algebraic transformation. The Messenger of Math. 15.

ELY: The algebraic solution of the modular equation for the septic transformation. Proceedings of the London Mathematical Society 13.

CAYLEY: Note sur la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques. Association Française. Toulouse 1887.

—— Sur l'équation modulaire pour la transformation de l'ordre 11. Comptes rendus 91.

SCHLÄFLI: Beweis der Hermite'schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen. Crelle Journal 72.

SOHNCKE: Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum et undecimi et decimi tertii et decimi septimi ordinis. Crelle 12.

CAYLEY: Correction of two numerical errors in Sohncke's paper respecting modular equations. Crelle 81.

GÜTZLAFF: Aequatio modularis pro transformatione functionum ellipticarum septimi ordinis. Crelle 12.

IGEL: Versuch, einige Sätze in der Theorie der Modulargleichungen rein algebraisch abzuleiten. Monatshefte für Mathematik, Band 3.

Daneben möge auf die zahlreichen Untersuchungen von Stephen Smith hingewiesen werden, die sich in dem Werke finden:

The collected Mathematical Papers of Henry John Stephen Smith. Oxford 1894.

Nr. 31 (§ 70).

In Bezug auf die Literatur über Differentialbeziehungen in der Transformationstheorie werde auf das Werk von Enneper 2. Auflage pag. 443 etc. verwiesen.

Wir heben die folgenden Arbeiten hervor:

EISENSTEIN: Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln. Math. Abhandl. pag. 159.

BRIOSCHI: Di una nuova equazione differenziale nella teorica delle funzioni ellittiche. Rend. Jst. Lomb. (2) X.

GENOCCHI: Intorno all' equazione differenziale del moltiplicatore. ibidem.

VALLE: Sulle equazioni differenziali alle quali soddisfanno il modulo ed il moltiplicatore nella transformazione delle funzioni ellittiche. Torino Atti XXV.

Nr. 32 (§ 71).

In Bezug auf die Entwickelung der Wurzeln der Modulargleichung möge verwiesen werden auf:

Matthieu: Mémoire sur les fonctions elliptiques. Journal de l'École Polytechnique. Tome XXV.

Krause: Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen. Math. Ann. XII.

—— Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und ihre Anwendungen auf die Zahlentheorie. Math. Ann. XII.

Nr. 33 (§ 72).

In Bezug auf die Discriminante der Modulargleichungen, soweit sie hier behandelt worden ist, werde verwiesen auf:

Hermite: Sur la théorie des équations modulaires. Paris 1859.

Krause: Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Mathematische Annalen 8. und 9. Band.

Nr. 34 (§§ 73, 74).

Die in Betracht kommenden Arbeiten von Weber sind:

Weber: Zur Theorie der elliptischen Functionen. Acta mathematica 6. und 11. Band, daneben ist sein Werk „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen" zu citiren.

Es würde zu weit führen, wollten wir alle die vielen interessanten Arbeiten anführen, die es sich zum Ziele stellen, allgemeine oder specielle Transformationsgleichungen im Weber'schen Sinne aufzustellen. Es kommen vor allem Arbeiten in Betracht, die von Kiepert, Brioschi, Klein und dessen Schülern verfasst sind. Zum grossen Theil befinden sich dieselben in den Berichten der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, in den Mathematischen Annalen, dem Crelle'schen Journal und den Annali di Matematica.

Nr. 35 (§ 75).

In Bezug auf die Betrachtungen des § 75 werde verwiesen auf:

Krause: Sur la transformation des fonctions elliptiques. Acta mathematica 3.

—— Zur Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Mathematische Annalen 25. Band

Rohde: Zur Transformation der Thetafunctionen. Hoppe Archiv (2), III.

Nr. 36 (§§ 76—78).

In Betreff der Thetafunctionen mit gebrochener Charakteristik werde verwiesen auf:

Prym und Krazer: Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel. Acta mathematica 3. Band.

Krazer: Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Perioden gebildet sind. Mathem. Annalen 22. Band.

Thomae: Darstellung des Quotienten zweier Thetafunctionen, deren Argumente sich um Drittel der Periodicitätsmoduln unterscheiden, durch algebraische Functionen. Math. Annalen 6. Band.

Bianchi: Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung. Math. Annalen 17. Band.

Klein: Ueber die unendlich vielen Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung. Math. Annalen 17. Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function. Math. Annalen 17.

Krause: Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind. Math. Annalen 26.

Voss: Theorie der Thetafunctionen einer Veränderlichen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen lassen. Greifswald 1886.

Sievert: Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Fünfteln ganzer Zahlen bestehen. Programm des Neuen Gymnasiums in Nürnberg 1890/91.

Braunmühl: Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunctionen. Abhandl. der K. Bayer. Academie der Wiss. II. Classe 16. Band.

—— Ueber die Göpel'sche Gruppe p-reihiger Thetacharakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind und die Fundamentalrelationen der zugehörigen Thetafunctionen. Math. Ann. 32.

—— Ueber Gruppen von p-reihigen Charakteristiken, die aus n^{teln} ganzer Zahlen gebildet sind und die Relationen zugehöriger Thetafunctionen n^{ter} Ordnung. Math. Ann. 37.

Heinze: Beiträge zur Anwendung der Dreitheilung der elliptischen Functionen auf die Theorie der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. Grunert's Archiv 70. Band.

Winzer: Zur Transformation der elliptischen Functionen, insbesondere der Transformation dritten und neunten Grades. Rostock 1886.

Schleicher: Darstellung und Umkehrung von Thetaquotienten, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Bayreuth 1890.

Nr. 37 (§ 79).

Die im § 79 eingeführten Functionen und ähnliche mit ihnen zusammenhängende haben sich für die Theorie der doppeltperiodischen Functionen von grosser Bedeutung gezeigt und sind besonders in neuerer Zeit nach den verschiedensten Richtungen hin untersucht worden. In Bezug hierauf möge vor Allem auf die Arbeiten von Klein und seinen Schülern verwiesen werden. Das beste Bild von dem Geleisteten giebt das citirte Werk von Klein über die Modulfunctionen, daneben möge die Arbeit von Hurwitz besonders hervorgehoben werden:

Hurwitz: Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten Math. Annalen 27. Band.

Nr. 38 (§ 80).

In Bezug auf die Additionstheoreme zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln werde auf die folgenden Arbeiten verwiesen:

Schröter: De aequationibus modularibus. Regiomonti 1854.

—— Ueber die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten ϑ und die Theilung dieser Functionen. Breslau 1855.

Göring: Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben. Math. Ann. 7.

HERSTOWSKI: Zur Theorie der Jacobi'schen Thetafunctionen. Math. Annalen 11.
HOPPE: Verallgemeinerung einer Relation der Jacobi'schen Functionen. Hoppe Archiv 70.
KRAUSE: Zur Transformation der elliptischen Functionen. Berichte der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1886.
—— Ueber Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Math. Ann. 27.
MÖLLER: Zur Transformation der Thetafunctionen. Rostock 1887.
MERTENS: Ueber eine Verallgemeinerung der Schröter'schen Multiplicationsformeln für Thetareihen. Programm Gymn. Köln 1889.
BOCKHORN: Beziehungen zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Jacobi'schen Moduln. Solingen 1891.
HÜBNER: Ueber die Umformung unendlicher Reihen und Producte mit Beziehung auf elliptische Functionen. Königsberg. Programm des Kneiphöfischen Gymnasiums 1891.
PRYM und KRAZER: Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Leipzig 1892.
KRAUSE: Zur Transformation der Thetafunctionen. Berichte der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften 1893.

Die in § 80 aufgestellten Additionstheoreme sind zuerst vom Verfasser in den citirten Arbeiten entwickelt worden.

Nr. 39 (§§ 81—85).

In Bezug auf die Theorie der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art, soweit sie in den §§ 81—85 in Betracht kommt, werde verwiesen auf:

HERMITE: Note sur la théorie des fonctions elliptiques ajoutée à la 6e édition du Traité de Calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix.
—— Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris 1885.
—— Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques. Toulouse Ann. II. C.
MITTAG-LEFFLER: Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Comptes rendus 90.
KRAUSE: Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art in Potenzreihen. Math. Ann. 30.
—— Zur Theorie der doppeltperiodischen Functionen zweiter u. dritter Art. Sitzungsbericht der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1889.
—— Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. ibidem 1891.
SCHEIBNER: Ueber elliptische Doppelsummen. ibidem 1890.
CAYLEY: On Hermite's H-product theorem. The Messenger of Math. (2), 18.
WEYR: Remarque sur la décomposition des fonctions doublement périodiques en éléments simples. Darboux Bulletin (2), XII.
NAETSCH: Zur Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten. Leipzig 1894.

Nr. 40 (§ 82).

Die ältere Literatur über die eingeführte Function $\zeta(u)$ und die damit zusammenhängenden Integrale zweiter Art findet sich in dem Lehrbuche von Enneper 2. Auflage pag. 213.

Daneben möge auf die citirten Lehrbücher, insbesondere das Halphen'sche Werk verwiesen werden. Von neueren Arbeiten seien die folgenden genannt:

GLAISHER: Proof of the addition equation for elliptic integrals of the second kind by means of the q-series. Messenger of Math. (2), XII.

WALKER: Proof of the addition theorem for elliptic integrals of the second kind and of Fagnano's theorem. Proceedings of the Lond. Math. Soc. 13.

FORSYTH: The addition theorem for the second and third elliptic integrals. Messenger of Math. XV.

GLAISHER: On the Zeta-functions. Messenger of Math. XV.

—— Note on the functions $Z(u)$, $\Theta(u)$, $\Pi(u, a)$. Proc. of the London Math. Soc. 17.

OLSSON: Harledning of Additionsteoremen för några Elliptiska Integralen. Tidsskrift for Mathematik af Zeuthen. Kopenhagen (5), V.

SCHOTTKY: Ueber das Additionstheorem der Cotangente und der Function $\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$. Crelle Journal 110.

